Temps de mélange – Corrigé 2021

Problème 1 – Marche aléatoire sur le tore

1. Il est clair que $\text{DIAM}(P) = 2\lfloor n/2 \rfloor \sim n$. La chaîne étant réversible (puisque la loi d'incréments μ est symétrique), l'estimée diffusive de Carne-Varoupoulos donne
$$t_{\text{MIX}} \;\; \geq \;\; \frac{(\text{DIAM}(P))^2}{16\ln(n^2)} \;\; = \;\; \Omega\left(\frac{n^2}{\ln n}\right).$$
Par ailleurs, puisque $\mu_\star = \frac{1}{8}$, l'estimée diffusive de Lee-Peres entraîne que
$$\frac{1}{\gamma_\star} \;\; \leq \;\; 16\,(\text{DIAM}(P))^2 \;\; = \;\; \mathcal{O}(n^2).$$
La marche étant réversible et paresseuse, on a $\lambda_\star = 1 - \gamma_\star$ et donc $t_{\text{REL}} \leq \frac{1}{\gamma_\star}$. Ainsi,
$$t_{\text{MIX}} \;\; \leq \;\; \left\lfloor \frac{1}{\gamma_\star} \ln \frac{2}{\sqrt{\pi_\star}} \right\rfloor \;\; = \;\; \mathcal{O}\left(n^2 \ln n\right).$$

2. Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ deux états. On considère le chemin simple $\gamma_{x \to y}$ qui consiste en une succession d'incréments $(0, 1)$, suivie d'une succession d'incréments $(1, 0)$. Un tel chemin a une longueur au plus $2n$, et une arrête a donnée n'est empruntée par au plus n^3 chemins de ce type (l'un des sommets doit se trouver sur la ligne déterminée par a). Comme $\vec{\pi}(a) = \frac{1}{8n^2}$ pour toute arête a, la congestion est au plus $16n^2$, et l'on retrouve donc
$$\frac{1}{\gamma_\star} \;\; = \;\; \mathcal{O}(n^2).$$

3. Par définition de P, on a pour toute observable $f\colon S \to \mathbb{C}$,
$$(Pf)(z_1, z_2) \;\; = \;\; \frac{f(z_1, z_2)}{2} + \frac{f(z_1 + 1, z_2) + f(z_1 - 1, z_2) + f(z_1, z_2 + 1) + f(z_1, z_2 - 1)}{8}.$$
En prenant $f(z_1, z_2) := e^{\frac{2i\pi z_1}{n}}$, cela se simplifie en
$$Pf \;\; = \;\; \frac{3 + \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{4} f.$$
Cela montre que $\lambda_\star \geq \frac{3+\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{4} = 1 - \frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi, $t_{\text{REL}} = \Theta(n^2)$.

4. On peut coupler deux trajectoires en couplant d'abord la première coordonnée comme sur l'exemple du cycle vu en cours, puis la seconde de la même manière. Comme chacune des deux coordonnées ne bouge qu'une fois sur deux en moyenne, l'espérance du temps de coalescence de chaque coordonnée est deux fois plus grande que sur le cycle, et l'espérance du temps de coalescence totale est donc 4 fois plus long. On a donc toujours $\mathbb{E}[T] = O(n^2)$ et $t_{\text{MIX}} = O(n^2)$.

5. Les questions précédentes montrent que t_{MIX} et t_{REL} sont tous deux d'ordre $\Theta(n^2)$. Comme la condition $t_{\text{REL}} \ll t_{\text{MIX}}$ n'est pas vérifiée, il ne peut y avoir cutoff.

Problème 2 – Marche biaisée sur la ligne

(1a) La loi forte des grands nombres assure que presque-sûrement,

$$\frac{Z_t}{t} \quad \xrightarrow[t\to\infty]{} \quad -\frac{1-2p}{2}. \tag{1}$$

(1b) La forme $X_t = f(X_{t-1}, \xi_t)$ avec $(\xi_t)_{t\geq 1}$ i.i.d. assure que $\mathbf{X}$ est une chaîne de Markov, avec

$$P(x,y) \quad = \quad \begin{cases} \frac{1-p}{2} & \text{si } y = x-1 \\ \frac{p}{2} & \text{si } y = x+1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } y = x \text{ et } x \notin \{1,n\} \\ \frac{1+p}{2} & \text{si } y = x = n \\ \frac{2-p}{2} & \text{si } y = x = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce noyau est ergodique car irréductible et paresseux. Enfin, pour $1 \leq x < n$ on a

$$\pi(x)P(x,x+1) \quad = \quad \frac{1}{c}\left(\frac{p}{1-p}\right)^x \frac{p}{2} \quad = \quad \frac{1}{c}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{x+1} \frac{1-p}{2} \quad = \quad \pi(x+1)P(x+1,x),$$

ce qui montre que π est réversible. La constante de normalisation vaut

$$c \quad = \quad \sum_{x=1}^{n} \left(\frac{p}{1-p}\right)^x \quad = \quad \frac{p}{1-2p}\left(1 - \left(\frac{p}{1-p}\right)^n\right).$$

(1c) On a toujours $\vec{\pi}(A \times A^c) = \vec{\pi}(A^c \times A)$, i.e. $\pi(A)\Phi(A) = \pi(A^c)\Phi(A^c)$. Ainsi, $\pi(A) \leq \frac{1}{2}$ si et seulement si $\Phi(A) \geq \Phi(A^c)$, et établir $\Phi_\star \geq \frac{1-2p}{2}$ revient à montrer que pour $\emptyset \subsetneq A \subsetneq S$,

$$\Phi(A) \vee \Phi(A^c) \quad \geq \quad \frac{1-2p}{2}. \tag{2}$$

Par symétrie, on peut supposer $1 \notin A$. Soit $x = \min A$. Comme $A \subseteq \{x, \ldots, n\}$, on a

$$\pi(A) \quad \leq \quad \pi(\{x,\ldots,n\}) \quad = \quad \pi(x)\sum_{y=x}^{n}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{y-x} \quad \leq \quad \pi(x)\frac{1-p}{1-2p}.$$

Pour obtenir (2), il suffit de noter que la frontière $A \times A^c$ contient $(x, x-1)$, de sorte que

$$\vec{\pi}(A \times A^c) \quad \geq \quad \vec{\pi}(x, x-1) \quad = \quad \pi(x)\frac{1-p}{2}.$$

(1d) L'inégalité de Cheeger assure que $\gamma_\star \geq \frac{\Phi_\star^2}{2}$. Comme par ailleurs la chaîne est réversible et paresseuse, on a $\lambda_\star = \lambda_2 = 1 - \gamma_\star$, de sorte que $\frac{1}{t_{\text{REL}}} = -\ln(1-\gamma_\star) \geq \gamma_\star$. On en déduit $t_{\text{REL}} \leq \frac{2}{\Phi_\star^2} = O(1)$. D'autre part, pour une chaîne réversible, on a

$$t_{\text{MIX}}(\varepsilon) \quad \leq \quad \left\lceil t_{\text{REL}} \ln\left(\frac{1}{2\varepsilon\sqrt{\pi_\star}}\right)\right\rceil.$$

La question (1b) donne $\ln \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{\pi_\star}} = O(n)$ et donc $t_{\text{MIX}} = O(n)$. En fait, $t_{\text{MIX}} = \Theta(n)$, puisque

$$t_{\text{MIX}} \quad \geq \quad \frac{\text{DIAM}(P)}{2} \quad = \quad \frac{n-1}{2},$$

le support de P étant symétrique. Comme $t_{\text{REL}} \ll t_{\text{MIX}}$, le cutoff est plausible.

(2a) Pour tout $t < T$, on a clairement $X_{t+1} \leq X_t + \xi_{t+1}$. Il suffit de sommer sur t pour obtenir que $X_{t\wedge T} \leq x + Z_{t\wedge T}$. Ainsi, sur l'événement $\{T > t\}$, on a $\{x + Z_t > 1\}$, et donc $\{n + Z_t > 1\}$.

(2b) On tire à pile ou face pour décider si X ou Y saute, et on applique à la coordonnée choisie le saut $x \mapsto [x+Z]_1^n$, avec $\mathbb{P}(Z=1) = p, \mathbb{P}(Z=-1) = 1-p$. Le noyau de couplage est

$$Q\left((x,y),(x',y')\right) \quad = \quad \begin{cases} \frac{1-p}{2} & \text{si } (x',y') \in \{(x-1,y),(x,y-1)\} \\ & \text{ou si } (x',y') = (x,y) \in \{1\} \times \{1,n\}^c \cup \{1,n\}^c \times \{1\} \\ \frac{p}{2} & \text{si } (x',y') \in \{(x+1,y),(x,y+1)\} \\ & \text{ou si } (x',y') = (x,y) \in \{n\} \times \{1,n\}^c \cup \{1,n\}^c \times \{n\} \\ 1-p & \text{si } (x',y') = (x,y) = (1,1) \\ p & \text{si } (x',y') = (x,y) = (n,n) \\ \frac{1}{2} & \text{si } (x',y') = (x,y) \text{ et } (x,y) \in \{(1,n),(n,1)\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La différence $\Delta = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$ ne varie que de $\{-1, 0, +1\}$ à chaque étape, et ne peut donc changer de signe sans toucher 0. Lorsque $\mathbf{X}$ touche 1, on a $\Delta \leq 0$, tandis que lorsque $\mathbf{Y}$ touche 1, on a $\Delta \geq 0$. Ainsi, une fois que $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ ont touché 1, la coalescence $\Delta = 0$ a eu lieu.

(2c) On déduit de (1a)-(2a)-(2b) que lorsque $t \sim \alpha n$ avec $\alpha > \frac{2}{1-2p}$, on a $\mathfrak{D}(t) \leq 2\mathbb{P}\left(Z_t > -n\right) \to 0$.

(3a) Par définition, on a $\mathfrak{D}(t) = \max_{x\in S, A\subseteq S} \pi(A) - P^t(x,A)$. De plus, ici,

$$\pi(A) \quad = \quad \frac{1}{c}\sum_{x=1}^{a}\left(\frac{p}{1-p}\right)^x \;\geq\; 1 - \left(\frac{p}{1-p}\right)^a.$$

(3b) L'inégalité $x + Z_t \leq X_t$ est triviale en $t=0$, et la seule façon pour qu'elle cesse d'être vraie entre les instants t et $t+1$ est que l'on ait $x + Z_t = X_t = n$ et $\xi_t = +1$. Ainsi, sur l'événement $E := \{x + \max_t Z_t < n\}$, on a $x + \mathbf{Z} \leq \mathbf{X}$. En particulier, $\{X_t \in A\} \cap E \subseteq \{x + Z_t \leq a\}$, donc

$$\mathbb{P}_x\left(X_t \in A\right) \quad \leq \quad \mathbb{P}\left(x + Z_t \leq a\right) + \mathbb{P}(\max_t Z_t \geq n - x).$$

(3c) En choisissant $x = n - a$, on déduit des deux questions précédentes que

$$\mathfrak{D}(t) \quad \geq 1 - \left(\tfrac{p}{1-p}\right)^a - \mathbb{P}\left(\tfrac{Z_t}{t} \leq \tfrac{2a-n}{t}\right) - \mathbb{P}\left(\max_t Z_t \geq a\right).$$

Le membre droit tend vers 1 lorsque $n \to \infty$ si l'on prend $t \sim \alpha n$ avec $\alpha > \frac{2}{1-2p}$, et $1 \ll a \ll n$. Ceci utilise $p/(1-2p) < 1$ et la question (1a). Notons que $\max Z_t < \infty$ p.s. puisque $Z_t \to -\infty$.