

Quelques algorithmes pour le contrôle, le
transport optimal et l'accélération de la
résolution d'EDP.

Julien Salomon

CEREMADE, Université Paris IX

Habilitation à diriger des recherches
18 novembre 2010

① Optimisation

- Contrôle optimal
- Transport optimal

② Analyse numérique

- Parallélisation en temps
- Formulation co-rotationnelle
- Accélération par pré-calcul

- ① Optimisation
 - Contrôle optimal
 - II. Transport optimal
- ② Analyse numérique
 - Parallélisation en temps
 - I. Formulation co-rotationnelle
 - Accélération par pré-calcul

- Partie I :

Schémas conservatifs pour la formulation co-rotationnelle.

En collaboration avec B. Wohlmuth et A. Weiss.

Équation d'évolution d'un solide élastique :

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{\varphi} \cdot \eta + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial F} W(E(d)) : \varepsilon(\eta) = \int_{\Omega} f \cdot \eta + \int_{\partial\Omega} g \cdot \eta =: F^{ext}(\eta)$$

avec :

- $\eta \in [H^1(\Omega)]^2$,

Équation d'évolution d'un solide élastique :

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{\varphi} \cdot \eta + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} W(E(d)) : \varepsilon(\eta) = \int_{\Omega} f \cdot \eta + \int_{\partial\Omega} g \cdot \eta =: F^{ext}(\eta)$$

avec :

- $\eta \in [H^1(\Omega)]^2$,
- $\mathbf{F} := \nabla d$ - gradient de la déformation,

Équation d'évolution d'un solide élastique :

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{\varphi} \cdot \eta + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial F} W(E(d)) : \varepsilon(\eta) = \int_{\Omega} f \cdot \eta + \int_{\partial\Omega} g \cdot \eta =: F^{ext}(\eta)$$

avec :

- $\eta \in [H^1(\Omega)]^2$,
- $F := \nabla d$,
- $W(E(d)) := \frac{\lambda}{2} \text{tr}(E(d))^2 + \mu \text{tr}(E(d)^2)$ - énergie emmagasinée (modèle de St-Venant/Kirchhoff),

Équation d'évolution d'un solide élastique :

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{\varphi} \cdot \eta + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial F} W(\mathbf{E}(d)) : \varepsilon(\eta) = \int_{\Omega} f \cdot \eta + \int_{\partial\Omega} g \cdot \eta =: F^{ext}(\eta)$$

avec :

- $\eta \in [H^1(\Omega)]^2$,
- $F := \nabla d$,
- $W(\mathbf{E}(d)) := \frac{\lambda}{2} \text{tr}(\mathbf{E}(d))^2 + \mu \text{tr}(\mathbf{E}(d)^2)$,
- $\mathbf{E}(d) := \frac{1}{2}(\nabla d + {}^t \nabla d + {}^t \nabla d \cdot \nabla d)$ - tenseur des contraintes.

Équation d'évolution d'un solide élastique :

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{\varphi} \cdot \eta + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial F} W(E(d)) : \varepsilon(\eta) = \int_{\Omega} f \cdot \eta + \int_{\partial\Omega} g \cdot \eta =: F^{ext}(\eta)$$

avec :

- $\eta \in [H^1(\Omega)]^2$,
- $F := \nabla d$,
- $W(E(d)) := \frac{\lambda}{2} \text{tr}(E(d))^2 + \mu \text{tr}(E(d)^2)$,
- $E(d) := \frac{1}{2}(\nabla d + {}^t \nabla d + {}^t \nabla d \cdot \nabla d)$.

Accélérer la résolution = Linéariser par rapport à d ?

Équation d'évolution d'un solide élastique :

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{\varphi} \cdot \eta + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial F} W(E(d)) : \varepsilon(\eta) = \int_{\Omega} f \cdot \eta + \int_{\partial\Omega} g \cdot \eta =: F^{ext}(\eta)$$

avec :

- $\eta \in [H^1(\Omega)]^2$,
- $F := \nabla d$,
- $W(E(d)) := \frac{\lambda}{2} \text{tr}(E(d))^2 + \mu \text{tr}(E(d)^2)$,
- $E(d) := \frac{1}{2}(\nabla d + {}^t \nabla d + {}^t \nabla d \cdot \nabla d)$.

Accélérer la résolution = Linéariser par rapport à d ?



$$\int_{\Omega} \rho \ddot{\varphi} \cdot \eta + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial F} W(E(d)) : \varepsilon(\eta) = \int_{\Omega} f \cdot \eta + \int_{\partial\Omega} g \cdot \eta =: F^{ext}(\eta)$$

$$\varphi(x, t) = x + d(x, t)$$



$$\varphi(x, t) = T(t) + R_{\theta(t)}(x + u(x, t)).$$

- variables T et θ : mouvement solide,
- variable u : déformation élastique résiduelle.

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{\varphi} \cdot \eta + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial F} W(E(d)) : \varepsilon(\eta) = \int_{\Omega} f \cdot \eta + \int_{\partial\Omega} g \cdot \eta =: F^{ext}(\eta)$$

$$\varphi(x, t) = x + d(x, t)$$



$$\varphi(x, t) = T(t) + R_{\theta(t)}(x + u(x, t)).$$

Intérêt :

$$E(d) = E(u),$$

et on peut linéariser par rapport à u !

Plusieurs triplets (T, θ, u) possibles... On choisit :

$$\int_{\Omega} u^2 \rightarrow \min .$$

Conditions d'optimalité :

$$u \in X = \left\{ \int_{\Omega} u = 0, \int_{\Omega} u \cdot \Pi x = 0 \right\} .$$

\Rightarrow Existence et unicité de la solution.

Grandmont, Maday, Metier, J. Elasticity 87, 1, 29-72, 2007.

Équation d'évolution d'un solide élastique :

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{\varphi} \cdot \eta + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial F} W(E(d)) : \varepsilon(\eta) = \int_{\Omega} f \cdot \eta + \int_{\partial\Omega} g \cdot \eta =: F^{ext}(\eta)$$

⇓

$$\int_{\Omega} \rho \left(\ddot{u} + 2\dot{\theta}\Pi\dot{u} + \ddot{\theta}\Pi(x+u) - \dot{\theta}^2(x+u) \right) \cdot v + \int_{\Omega} \Sigma(u) : \varepsilon(v) = \tilde{F}_{\theta}^{ext}(v).$$

But du travail : trouver une discrétisation qui conserve l'énergie pour

$$\int_{\Omega} \rho \left(\ddot{u} + 2\dot{\theta}\Pi\dot{u} + \ddot{\theta}\Pi(x + u) - \dot{\theta}^2(x + u) \right) \cdot v + \int_{\Omega} \Sigma(u) : \varepsilon(v) = \tilde{F}_{\theta}^{ext}(v).$$

But du travail : trouver une discrétisation qui conserve l'énergie pour

$$\int_{\Omega} \rho \left(\ddot{u} + 2\dot{\theta}\Pi\dot{u} + \ddot{\theta}\Pi(x + u) - \dot{\theta}^2(x + u) \right) \cdot v + \int_{\Omega} \Sigma(u) : \varepsilon(v) = \tilde{F}_{\theta}^{ext}(v).$$

Recette :

- Introduire une variable pivot = la vitesse relative.

$$s(t, x) = {}^t R(\theta(t))(\dot{\varphi}(t, x) - T(t)) = \dot{u}(t, x) + \dot{\theta}\Pi(x + u(t, x)).$$

$$\int_{\Omega} \rho \left(\dot{s} + \dot{\theta} \Pi(x + s) \right) \cdot v + \int_{\Omega} \Sigma(u) : \varepsilon(v) = \tilde{F}_{\theta}^{ext}(v).$$

Recette :

- Introduire une variable pivot = la vitesse relative.

$$s(t, x) = {}^t R(\theta(t))(\dot{\varphi}(t, x) - T(t)) = \dot{u}(t, x) + \dot{\theta} \Pi(x + u(t, x)).$$

$$\int_{\Omega} \rho \left(\dot{s} + \dot{\theta} \Pi(x + s) \right) \cdot v + \int_{\Omega} \Sigma(u) : \varepsilon(v) = \tilde{F}_{\theta}^{ext}(v).$$

Recette :

- Introduire une variable pivot = la vitesse relative.

$$s(t, x) = {}^t R(\theta(t))(\dot{\varphi}(t, x) - T(t)) = \dot{u}(t, x) + \dot{\theta} \Pi(x + u(t, x)).$$

- Utiliser un schéma de type point milieu à deux niveaux : pour u et pour s .

$$(\dot{ab})_{n+1/2} = \dot{a}_{n+1/2} b_{n+1/2} + a_{n+1/2} \dot{b}_{n+1/2}$$

$$\int_{\Omega} \rho \left(\dot{s}_{n+1/2} + \dot{\theta}_{n+1/2} \Pi(x + s_{n+1/2}) \right) \cdot v + \int_{\Omega} \Sigma(u_{n+1/2}) : \varepsilon(v) = \tilde{F}_{\theta_{n+1/2}}^{ext}(v).$$

Recette :

- Introduire une variable pivot = la vitesse relative.

$$s(t, x) = {}^t R(\theta(t))(\varphi(t, x) - T(t)) = \dot{u}(t, x) + \dot{\theta}\Pi(x + u(t, x)).$$

- Utiliser un schéma de type point milieu à deux niveaux : pour u et pour s .

$$(\dot{ab})_{n+1/2} = \dot{a}_{n+1/2} b_{n+1/2} + a_{n+1/2} \dot{b}_{n+1/2}$$

$$\int_{\Omega} \rho \left(\dot{s}_{n+1/2} + \dot{\theta}_{n+1/2} \Pi(x + s_{n+1/2}) \right) \cdot v + \int_{\Omega} \Sigma(u_{n+1/2}) : \varepsilon(v) = \tilde{F}_{\theta_{n+1/2}}^{ext}(v).$$

Recette :

- Introduire une variable pivot = la vitesse relative.

$$s(t, x) = {}^t R(\theta(t))(\varphi(t, x) - T(t)) = \dot{u}(t, x) + \dot{\theta} \Pi(x + u(t, x)).$$

- Utiliser un schéma de type point milieu à deux niveaux : pour u et pour s .

$$(\dot{ab})_{n+1/2} = \dot{a}_{n+1/2} b_{n+1/2} + a_{n+1/2} \dot{b}_{n+1/2}$$

- Mais où est l'équation sur θ ?!

$$\int_{\Omega} \rho \left(\dot{s}_{n+1/2} + \dot{\theta}_{n+1/2} \Pi(x + s_{n+1/2}) \right) \cdot v + \int_{\Omega} \Sigma(u_{n+1/2}) : \varepsilon(v) = \tilde{F}_{\theta_{n+1/2}}^{ext}(v),$$

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \rho (s_{n+1} \cdot \Pi(x + u_{n+1}) - s_n \cdot \Pi(x + u_n)) = \tilde{F}_{\theta_{n+1/2}}^{ext} \cdot \Pi(x + u_{n+1/2}).$$

Recette :

- Introduire une variable pivot = la vitesse relative.

$$s(t, x) = {}^t R(\theta(t))(\dot{\varphi}(t, x) - T(t)) = \dot{u}(t, x) + \dot{\theta} \Pi(x + u(t, x)).$$

- Utiliser un schéma de type point milieu à deux niveaux : pour u et pour s .

$$(\dot{ab})_{n+1/2} = \dot{a}_{n+1/2} b_{n+1/2} + a_{n+1/2} \dot{b}_{n+1/2}$$

- Mais où est l'équation sur θ ?! \Rightarrow Conservation du moment.

Finalement, avec :

$$\mathcal{E}_n = \frac{1}{2} \mathcal{M}(\dot{T}_n)^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho s_n^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}_n) : \varepsilon(\mathbf{u}_n),$$

Théorème:

Les suites définies par le schéma vérifient:

$$\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n = \Delta t \tilde{F}_{\theta_{n+1/2}}^{ext} \cdot \varphi_{n+1/2}.$$

Achtung !!! Il reste un problème : l'espace

$$X = \left\{ \int_{\Omega} u = 0, \int_{\Omega} u \cdot \Pi x = 0 \right\}$$

n'est pas bien adapté aux éléments finis....

Achtung !!! Il reste un problème : l'espace

$$X = \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{u} = 0, \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \Pi x = 0 \right\}$$

n'est pas bien adapté aux éléments finis....

⇒ On ajoute un multiplicateur de Lagrange α au moment de discrétiser en espace:

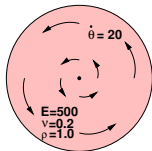
$$\begin{pmatrix} A_{\theta_{n+1/2}} & M\Pi x \\ (M\Pi x)^{\top} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{n+1/2} \\ \alpha_{n+1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_{\theta_{n+1/2}}^{ext} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Théorème: Etant donné $\mathcal{E}_{\max} > 0$, $F_{\max} > 0$ et $\nu > 0$, supposons qu'à l'étape n de l'algorithme $\mathcal{E}_n \leq \mathcal{E}_{\max}$, $\|f_{n+1/2}\| \leq F_{\max}$ et

$$\nu \leq \int_{\Omega} \rho x \cdot (x + u_{n+1/2}),$$

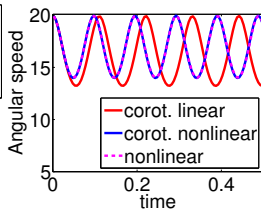
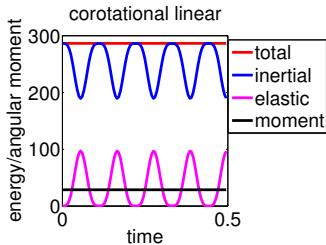
alors il existe Δt^* dépendant de \mathcal{E}_{\max} , F_{\max} , ν tel que, étant donné $T_n, \dot{T}_n, u_n, s_n, \theta_n, \tilde{F}_{\theta_{n+1/2}}$, le schéma admet une solution $(T_{n+1}, \theta_{n+1}, u_{n+1})$.

Quelques exemples



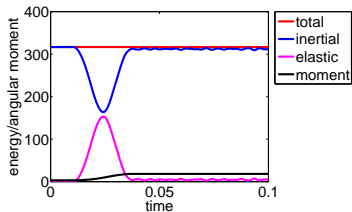
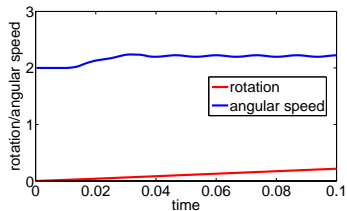
- $\Delta t = 0.001$
- Conditions initiales :
 $u_0 = 0, \dot{\theta} = 20.$

Corotationnel Nonlin. Lin.



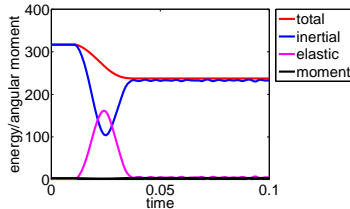
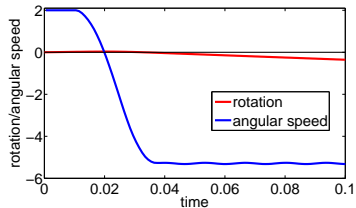
Quelques exemples

Avec contact :



Quelques exemples

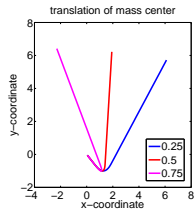
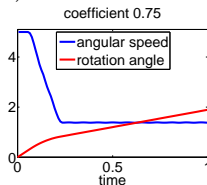
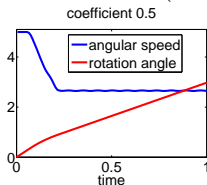
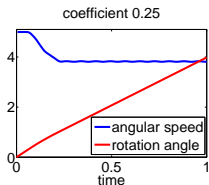
Avec contact et friction :



Quelques exemples

Avec contact, friction et en 3D :

$$\dot{\theta}_0 = 5, v_0 = (10, -10)^\top$$



- Partie II :

Trois algorithmes pour le transport optimal.

En collaboration avec G. Carlier, J. Delon, A. Sobolevskiĭ.

- En dimension 1:
 - Coût convexe (condition de Monge) sur le cercle : algorithme par coupure.
 - Coût concave : indicateurs d'appariements locaux.
- En dimension d :
 - Un problème de transport sans cible.

- En dimension 1:
 - **Coût convexe (condition de Monge) sur le cercle : algorithme par coupure.**

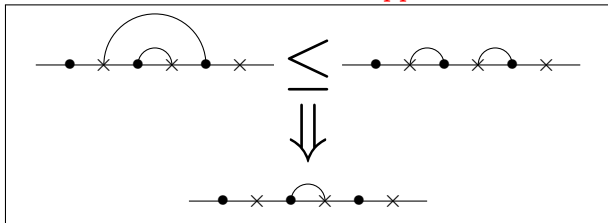
Théorème : La fonction

$$C_{[F_0, F_1]}(\theta) = \int_0^1 c(F_0^{-1}(v), (F_1^\theta)^{-1}(v)) dv.$$

est convexe, et son minimum correspond au point de césure donnant lieu transport optimal sur le cercle.

- Coût concave : indicateurs d'appariements locaux.
- En dimension d :
 - Un problème de transport sans cible.

- En dimension 1:
 - Coût convexe (condition de Monge) sur le cercle : algorithme par coupure.
 - **Coût concave : indicateurs d'appariements locaux.**



- En dimension d :
 - Un problème de transport sans cible.

On considère le problème de transport sans état cible :

$$\inf_v E(v),$$

avec

$$E(v) := \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2} \|v(t, x)\|^2 \rho(t, x) dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} V(x) \rho(1, x) dx$$

et sous la contrainte (Equation de Fokker-Planck)

$$\partial_t \rho - \varepsilon^2 \Delta \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \text{ sur } (0, 1) \times \mathbb{R}^d, \quad \rho(0, \cdot) = \rho_0.$$

On considère le problème de transport sans état cible :

$$\inf_v E(v),$$

avec

$$E(v) := \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2} \|v(t, x)\|^2 \rho(t, x) dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} V(x) \rho(1, x) dx$$

et sous la contrainte (Equation de Fokker-Planck)

$$\partial_t \rho - \varepsilon^2 \Delta \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \text{ sur } (0, 1) \times \mathbb{R}^d, \quad \rho(0, \cdot) = \rho_0.$$

- Pas d'état cible, mais un potentiel à minimiser.
- Prise en compte de la diffusion.
- Seule variable v , pas de convexité explicite.

Discrétisation : fonctionnelle $E_{\Delta t, \Delta x}(v)$

Dicrétisation de la fonctionnelle.

$$E_{\Delta t, \Delta x}(v) := \Delta t \cdot \Delta x \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} \frac{1}{2} q_j(v^i) \rho_j^i + \Delta x \sum_{j=1}^{M-1} V_j \rho_j^N$$

Sous forme compacte:

$$E_{\Delta t, \Delta x}(v) := \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} \langle \rho^i, q(v^i) \rangle + \langle \rho^N, V \rangle$$

avec :

$$q_j(v^i) = \frac{(v_{j-1/2}^i)^2 + (v_{j+1/2}^i)^2}{2}.$$

Problème : pendant l'optimisation, la positivité de ρ doit être garantie !

Discrétisation : équation de Fokker-Planck

Problème : pendant l'optimisation, la positivité de ρ doit être garantie !

\Rightarrow "up-winding" pour la partie hyperbolique de la dynamique.

$$\partial_t \rho = \varepsilon^2 \Delta \rho - \operatorname{div}(\rho v)$$



$$\begin{aligned} \frac{\rho_j^{i+1} - \rho_j^i}{\Delta t} &= \varepsilon^2 \frac{1}{\Delta x^2} (\rho_{j+1}^i - 2\rho_j^i + \rho_{j-1}^i) \\ &\quad - \frac{1}{\Delta x} (\rho_{j+1/2}^i v_{j+1/2}^i - \rho_{j-1/2}^i v_{j-1/2}^i), \end{aligned}$$

avec

$$\rho_{j+1/2}^i = \begin{cases} \rho_{j+1}^i & \text{si } v_{j+1/2}^i < 0 \\ \rho_j^i & \text{si } v_{j+1/2}^i \geq 0. \end{cases}$$

Discrétisation : équation de Fokker-Planck

Problème : pendant l'optimisation, la positivité de ρ doit être garantie !

\Rightarrow "up-winding" pour la partie hyperbolique de la dynamique.

$$\partial_t \rho = \varepsilon^2 \Delta \rho - \operatorname{div}(\rho v)$$



$$\rho^{i+1} = (A + B(v^i)) \rho^i,$$

sous forme compacte.

Pour optimiser, on construit un schéma monotone. On a :

$$E_{\Delta t, \Delta x}(v') - E_{\Delta t, \Delta x}(v) = \Delta t \cdot \Delta x \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-2} \Delta_j^i(v', v),$$

où :

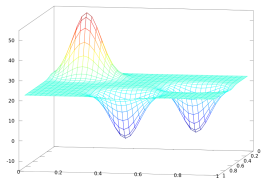
$$\begin{aligned} \Delta_j^i(v', v) = & \frac{\rho_j^i + \rho_{j+1}^i}{2} \cdot \frac{(v_{j+1/2}^i)^2 - (v_{j+1/2}^i)^2}{2} \\ & + \frac{\rho_{j+1/2}^i v_{j+1/2}^i - \tilde{\rho}_{j+1/2}^i v_{j+1/2}^i}{\Delta x} \cdot \frac{\phi_{j+1}^{i+1} - \phi_j^{i+1}}{\Delta x}, \end{aligned}$$

avec ϕ l'adjoint discret :

$$\begin{aligned} \phi^N &= V, \\ \phi^i &= (A^* + B^*(v^i))\phi^{i+1} + \frac{\Delta t}{2} q(v^i). \end{aligned}$$

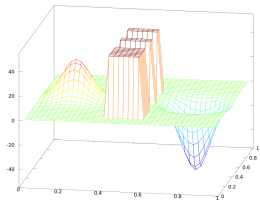
Quelques exemples

Avec deux puits.



Quelques exemples

Avec obstacles.



Merci !