
Examen - Traitement numérique du signal - 2009

Les documents et calculatrices sont autorisés. La qualité de la rédaction et de la présentation entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1. (Synthèse d'un filtre RIF passe-bas)
On veut réaliser un filtre passe-bas numérique à réponse impulsionnelle finie à $N = 17$ coefficients. La fréquence de coupure est : $fc = fe/4$ avec $fe = 1$ fréquence d'échantillonnage. On suppose que le théorème de Shannon est respecté.

1. Donner l'allure de la réponse en fréquence $H(\omega)$ sur $[-\pi, \pi]$ du filtre idéal non causal à déphasage nul correspondant au cahier des charges.
2. Déterminer $(\tilde{h}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ la réponse impulsionnelle du filtre idéal à phase.
   Réponse- On calcule :
   $$\tilde{h}_k = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{-ikt}dt = \frac{2}{k}\sin(k\frac{\pi}{4}).$$
3. Effectuer la troncature puis rendre causal cette réponse impulsionnelle et donner les coefficients du filtre finalement obtenu.
   Réponse- On obtient :
   $$h_k = \begin{cases} \frac{2}{k-(N-1)/2}\sin((k-(N-1)/2)\frac{\pi}{4}), & si\ 0 \leqslant k \leqslant N, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$
   avec $N = 17$.
4. Donner l'expression de l'amplitude de la réponse fréquentielle du filtre obtenu en fonction des coefficients.
   Esquisser l'allure de la réponse fréquentielle.
5. Quels sont les effets de la troncature de $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ sur la réponse en fréquence du filtre synthétisé ? Comment pourrait-on améliorer les résultats ?

   Réponse- Plutôt que de considérer h_k, c'est-à-dire une fenêtre rectangulaire, on peut utiliser une fenêtre plus élaborée, par exemple une fenêtre de Blackman.

Exercice 2. (Etude d'un filtre)
Dans cet exercice, on étudie un filtre donné par un schéma-bloc.

1. On considère tout d'abord une sous-partie du filtre. Cette sous-partie est le filtre représenté par le schéma-bloc représenté Fig. 1. Le bloc " $\times g$" représente la multiplication par un réel g donné.
   Donner, en fonction de g, l'expression de la fonction de transfert $H'(z)$ de cette sous-partie du filtre.
   Réponse- Après calcul, on obtient :
   $$H'(z) = \frac{z^{-1}}{1 - gz^{-1}}.$$

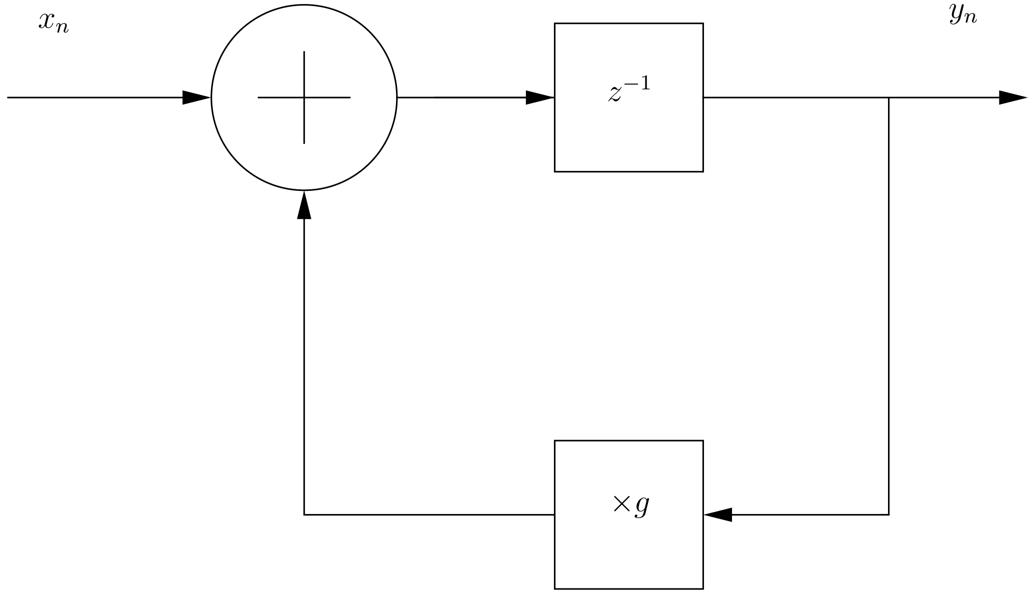

FIG. 1 – Sous-partie du filtre

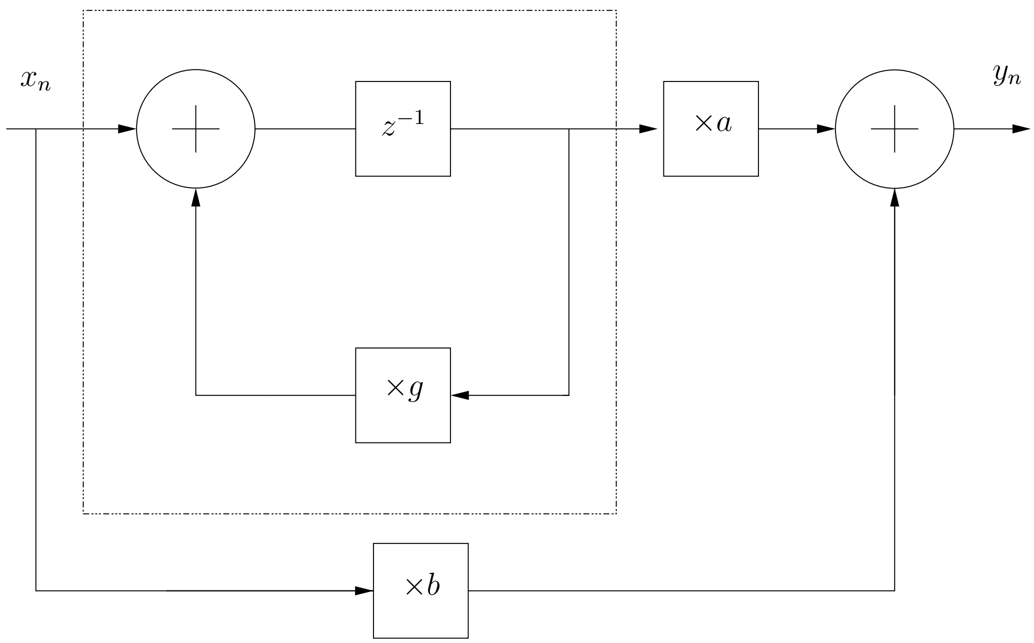

FIG. 2 – Filtre complet

2. On considère maitenant le filtre complet, repésenté par le schéma-bloc représenté Fig. 2. Le bloc " $\times b$" représente la multiplication par un réel b donné. Donner, en fonction de a, g et b, l'expression de la fonction de transfert $H(z)$ du filtre complet.
   Réponse- Après calcul, on obtient :
   $$H(z) = \frac{b + (a - gb)z^{-1}}{1 - gz^{-1}}.$$
3. Sous quelle condition le filtre complet est-il stable ?
   Réponse- Il faut que le pôle soit de module inférieur à 1, soit $|g| < 1$.
4. On suppose que les coefficients du filtre vérifient les relations :
   $$a = 1 - g^2, \; b = -g.$$

Montrer que le module de la réponse fréquentielle est constant.
Réponse- En simplifiant à l'aide des formule, la fonction de transfert devient :

$$H(z) = \frac{z^{-1} - g}{1 - gz^{-1}},$$

ce qui donne :

$$H(e^{i\omega}) = \frac{e^{-i\omega} - g}{1 - ge^{-i\omega}} = e^{-i\omega}\frac{1 - ge^{i\omega}}{1 - ge^{-i\omega}},$$

qui est de module 1 pour tout ω.

5. Pourquoi, à votre avis, appelle-t-on se filtre "réverbérateur" ?
Réponse- Un développement en série entière donne :

$$H(z) = -g + \sum_{k=1}^{+\infty}(g^{k-1} - g^{k+1})z^{-k}.$$

Cela montre que le signal est répèté à chaque période, en étant de plus en plus atténué.

Exercice 3. (Codage de Huffman)
On considère l'alphabet $S = s1, s2, s3, s4, s5, s6, s7, s8$ avec la distribution de fréquences f suivante :

s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8
$0,4$	$0,18$	$0,1$	$0,1$	$0,07$	$0,06$	$0,05$	$0,04$

1. Calculer l'entropie de la source d'information S.
Réponse- Après calcule, on obtient : H(S)=1.76919152066834...
2. Calculez un codage de Huffman de cette source, puis la longueur moyenne de ce codage. Comparez cette longueur moyenne à l'entropie.
Réponse- On obtient l'arbre suivant :

Et la longueur moyenne vaut 2.48.

Exercice 4. (Borne de Hamming)
On considère un alphabet A comprenant s symboles. Pour tout mot w appartenant A^n, on définit :
– la boule de centre w et de rayon k : $B(w, k) = \{v \in A^n; d(w, v) \leqslant k\}$

– la sphère de centre w et de rayon k : $S(w,k) = \{v \in A^n ; d(w,v) = k\}$

1. Exemple : $s = 2$, soit $w = 0110 \in \{0,1\}^4$, déterminer $S(w,1), S(w,2)$, et $B(w,2)$.
   Réponse- Les sphères se déterminent en modifiant un ou deux éléments de w. On obtient :
   $$S(w,1) = \{0111, 0100, 0010, 1110\},$$
   $$S(w,2) = \{1111, 1100, 1010, 0011, 0000, 0101\}.$$
   De plus, $B(w,2) = S(w,1) \cup S(w,2)$.
2. Déterminer le nombre d'éléments de $S(w,k)$.
   Réponse- Pour obtenir un élément de $S(w,k)$, il faut choisir k lettres du mot w -C_n^k possibilités- et les modifier -$(s-1)$ possibilités pour chaque lettre- d'où $Card(S(w,k)) = C_n^k (s-1)^k$.
3. Montrer que
   $$\text{Card}\,(B(w,k)) = C_n^0(s-1)^0 + C_n^1(s-1)^1 + C_n^2(s-1)^2 + ... + C_n^k(s-1)^k = \sum_{i=0}^{k} C_n^i (s-1)^i.$$
   Réponse- Il suffit de remarquer que la boule de rayon k est l'union disjointe de toutes les sphères de rayons inférieurs ou égaux à k.
4. Soit $C \in A^n$ un code correcteur des mots de A^p (bien sûr $p < n$) et de distance d. On note $t = E((d-1)/2)$: c'est le nombre d'erreurs que peut corriger C.
   (a) Quel est le nombre de mots de C ?
   Réponse- Le nombre de mots de C est égal au nombre de mot de l'ensemble qu'il code, c'est-à-dire A^p. Donc $Card(C) = s^p$.
   (b) Montrer que si w_1 et w_2 sont deux mots distincts de C, alors $B(w_1,t) \cap B(w_2,t)$ est vide.
   Réponse- Supposons que l'intersection en question ne soit pas vide, et contienne donc un mot w_3. Alors :
   $$dist(w_1,w_2) \leqslant dist(w_1,w_3) + dist(w_3,w_2) \leqslant 2t \leqslant d-1,$$
   ce qui contredit le fait que la distance du code soit d.
   (c) En déduire l'inégalité de Hamming :
   $$\sum_{i=0}^{t} C_n^i (s-1)^i \leqslant s^{n-p}.$$
   Réponse- Le nombre total de mots de A^n est s^n. D'autre part, les mots de C sont, d'après la question précédente, contenus dans un ensemble de boules disjointes de A^n. Le cardinal de cette union vaut donc $s^p.\sum_{i=0}^{t} C_n^i (s-1)^i$. et est donc inférieur à s^n.
5. Applications : On appelle code parfait un code tel qu'on ait l'égalité
   $$\sum_{i=0}^{t} C_n^i (s-1)^i = s^{n-p}.$$
   Dans ce cas, les boules $B(w,t), w \in C$, forment une partition de A^n. Dans les questions qui suivent, <u>on considère seulement le cas $s = 2$</u>.

(a) Montrer que le code binaire par triplement ($n = 3, p = 1$) et de distance 3 est un code parfait. Même chose pour le code binaire de Golay de taille $n = 23, p = 12$ et de distance 7.

Réponse- Il suffit de déterminer vérifier les différentes églités. On a bien :

$$\sum_{i=0}^{2} C_3^i = 2^{3-1},$$

et

$$\sum_{i=0}^{3} C_{23}^i = 2^{23-12}.$$

(b) Soit C un code binaire de taille $n = 12, p = 5$. En utilisant l'inégalité de Hamming, donner une majoration de sa distance.

Réponse- Il suffit de trouver le t le plus grand pour lequel l'inégalité est vérifiée, puis d'en déduire le d correspondant. On trouve : $t = 3$, donc $d \leqslant 7$.