Examen - Traitement numérique du signal - Janvier 2010

Les documents et calculatrices sont autorisés. La qualité de la rédaction et de la présentation entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1.(Questions courtes)

1. Citer deux propriétés de la transformée de Fourier d'une fontion $L^1(\mathbb{R})$
   Correction : une transformée de Fourier tend vers 0 *en l'infini et est uniformément continue.*
2. Une source uniforme discrète émet des valeurs comprise entre -30 et 50. On la quantifie uniformément sur 3 bits. Quelles sont les valeurs obtenues après quantification ?
   Correction : on prend les valeurs des milieux des intervalles de quantification. On obtient
   $$\{-25, -15, -5, 5, 15, 25, 35, 45\}.$$
3. Un codage source a pour mots :
   $$\{0001, 1, 010, 001, 011\}.$$
   (a) Ce code est-il préfixe (i.e. auto-ponctué) ?
   Correction : oui il est auto-ponctué, car aucun mot n'est le début d'un autre.
   (b) Si oui, dessiner l'arbre correspondant. Sinon, indiquer une modification simple le rendant auto-ponctué.
   Correction : faire l'arbre...
4. Citer deux exemples de support d'information binaire.
   Correction : un CD (aussi appelé disque optique, le bit est codé par un trou), un onde lumineuse dans une fibre optique (codage en fréquence ou en phase), une impulsion électrique dans un cable électrique (codage en tension ou en intensité), une onde électromagnétique dans l'atmosphère ou dans l'espace (codage en phase)...
5. On se donne un entier naturel N, une suite finie de N nombres réels $(a_0, a_1, ..., a_{N-2}, a_{N-1})$ et un nombre réel ω. On considère le nombre A défini par :
   $$A = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + ... + a_{N-1}\omega^{(N-1)}.$$
   Quel est le nombre minimal de multiplications à effectuer pour pour calculer la valeur de A ?
   Correction : en utilisant l'algorithme de Hörner, le calcul nécessite $(N-1)$ *multiplications.*

Exercice 2.(Codage de Huffman)
Une source sans mémoire S génère des symboles A, B, C, D, E, F et G avec les probabilités respectives 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/4, 1/4, 1/4.

1. Réaliser un codage de Huffman des 7 valeurs de S.
   Correction : faire un arbre. On trouve que A, B, C, D ont des codes de longueurs 4, et G, E, F ont des codes de longueurs 2. Un codage possible est

Mot source	*Mot code*
A	0000
B	0001
C	0010
D	0011
E	10
F	11
G	01

2. Comparer le nombre moyen $\bar{n}$ d'éléments binaires utilisés par ce code pour représenter une valeur de S avec l'entropie de S.

Correction : le nombre moyen de bits utilisés pour coder un symbole est

$$\bar{n} = 2.5.$$

L'entropie vaut

$$H(S) = -4 \times \frac{1}{16} \log_2(\frac{1}{16}) - 3 \times \frac{1}{4} \log_2(\frac{1}{4}) = 2.5.$$

Le codage est donc optimal dans ce cas.

3. Est-il intéressant de coder les extensions de S plutot que S ? Si oui, pourquoi ? Sinon jusitifer.

Correction : la limite théorique étant atteinte, il est inutile de coder les extensions de la source.

Exercice 3.(Un code correcteur)

On considère le code linéaire dont les mots sont constitués de deux éléments binaires d'information (a_1, a_2) et trois éléments binaires de contrôle (a_3, a_4, a_5) tels que :

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 \\ a_4 &= a_2 \\ a_5 &= a_1 + a_2 \end{aligned}$$

1. Expliciter à l'aide d'un tableau le code en attribuant à chaque couple de bits d'une source binaire un mot code constitué de 5 éléments binaires.

Correction : on obtient le tableau suivant.

Mot source	*Mot code*
00	00000
01	01011
10	10101
11	11110

2. Préciser le pouvoir correcteur de ce code en tenant compte de la question précédente.

Correction : la distance du code étant 3, on peut corriger une erreur.

3. Donner l'expression de la matrice génératrice G et de la matrice de contrôle H.

Correction : on note G la matrice génératrice et H la matrice de contrôle. On a :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Construire une table de décodage indiquant les configurations d'erreurs effectivement corrigées : on demande précisément un tableau qui indique les corrections à effectuer en fonction du syndrôme observé. On ne considérera que les syndrômes donnant lieu à une correction exacte.

Correction : on ne considère donc que les syndrômes correspondant à au plus une erreur. Il y en a 6 (5 correspondants à une erreur, 1 correspondant à 0 erreur), et sont donnés par les 5 colonnes de H plus le vecteur nul.

Syndrome	*Bit a corriger*	*Mot decode*
$(000)^t$	*aucun*	(a_1, a_2)
$(101)^t$	a_1	$(a_1 + 1, a_2)$
$(011)^t$	a_2	$(a_1, a_2 + 1)$
$(100)^t$	a_3	(a_1, a_2)
$(010)^t$	a_4	(a_1, a_2)
$(001)^t$	a_5	(a_1, a_2)

5. On transmet ces mots de code sur un canal binaire symétrique de probabilité d'erreur $p = 10^{-2}$. Calculer la probabilité d'erreur par mot codé résultant de l'utilisation de la table de décodage. Comparer avec la probabilité d'erreur qui résulterait d'une transmission directe (sans codage) des mots source constitués de deux éléments binaires.

Correction : sans correction, la probabilité de transmission correcte est de $(1-p)^2 = 0.9801$. *Avec la stratégie de codage proposée* $(1-p)^5 + 5p(1-p)^4 = 0.99902$. *La probabilité d'une erreur de transmission passe donc de 1.99% à 9.8015e-02%.*

Exercice 4.(Transmission d'un signal)
On dispose d'un canal de transmission dont le débit est de 36 000 bits/s pour transmettre un son.

1. Sachant que la fréquence maximale contenue dans le son que l'on souhaite transmettre est $F_{max} = 2.3kHz$, proposer une valeur minimale pour la fréquence d'échantillonnage F_e.

   Correction : d'après le Th. de Shannon-Nyquist, il faut un échantillonage à une fréquence d'au moins $4.6kHz$.
2. Pour cette fréquence et ce canal, sur combien de bit au maximum peut-on quantifier le signal ?

   Correction : on doit envoyer 4600 *échantillons par seconde, or on dispose de* 36000 *bits par seconde. Cela signifie qu'on peut allouer* 7.8261 *bit par échantillon, soit* 7 *bits.*
3. Avec ce nombre de bits, sur combien de valeurs sera quantifié le signal ?

   Correction : on pourra quantifier chaque échantillon sur 2^7 *niveaux, soit* 128 *valeurs.*
4. On souhaite maintenant utiliser ce canal pour transmettre l'information émise par une source binaire S émettant des symboles "0" et "1" avec un débit de 64 000 bits/s. Cette source émet un "0" avec une probabilité de $p_0 = 0.1$ et un "1" avec une probabilité $p_1 = 0.9$. Peut-on utiliser le canal C pour transmettre l'information de S ?

   Correction : pour décider si le canal a une capacité suffisante, il faut calculer l'entropie de la source. Celle-ci vaut $H(S) = -.1 * log_2(.1) - .9 * log_2(.9) = 0.469$. *La limite théorique de compression est donc de* 0.469×64000 *qui est inférieure à la capacité du canal. On pourra donc utiliser le canal, à condition de coder une extension suffisament élevée de la source.*
5. Quelle extension de S doit-on coder ?

   Correction : on a $H(S) \leqslant \bar{n} \leqslant H(S) + \frac{1}{k}$. *Pour garantir* $H(S) + \frac{1}{k} \leqslant 0.5$, *il faut prendre* $k \geqslant 33$.

Exercice 5.(Etude d'un filtre)

Soit un filtre défini par la formule suivante :

$$y_n - y_{n-1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1} - x_{n-2} - x_{n-3}). \qquad (\star)$$

1. Calculer les 8 premiers termes $y_0, ..., y_7$ de la réponse impulsionelle. En déduire son expression complète.

   Correction : on obtient la suite $\{0.5, 1, 0.5, 0, 0, 0, 0, 0\}$. *Par récurrence, on montre que la suite est nulle par la suite. On obtient donc :*

$$\begin{aligned} h_0 &= 0.5 \\ h_1 &= 1 \\ h_2 &= 0.5 \\ h_n &= 0 \textit{ sinon.} \end{aligned}$$

2. Calculer la réponse en fréquence (aussi appellée réponse fréquentielle) $H(e^{i\omega})$. Tracer $|H(e^{i\omega})|$ pour $\omega \in [0, \pi]$. Comment qualifieriez-vous ce filtre ?

   Correction : on obtient $H(\omega) = e^{-i\omega}(1 + \cos(\omega))$. *C'est un filtre qui amplifie les basse fréquences.*
3. Est-il à phase linéaire ?

   Correction : oui, puisque d'après le calcul précédent, la phase vaut $-\omega$.
4. Montrer que l'on peut réecrire l'équation $(\star)$ de telle sorte que le filtre apparaisse comme un filtre à réponse impulsionnelle finie.

   Correction : connaissant $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *il est facile de déduire que* $y_n = 0.5x_n + x_{n-1} + 0.5x_{n-2}$. *Ce qui peut aussi se montrer par récurrence à l'aide de la définition du filtre.*