Université Paris-Dauphine Année 2006-2007
UFR MIDO-M1

Examen - Traitement numérique du signal - 2007

Les documents et calculatrices sont autorisés. La qualité de la rédaction et de la présentation entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1.
Soit s un signal stable, $0 < T < +\infty$ et $\phi = \sum_{n\in\mathbb{R}} s(t+nT)$. Montrer que :

1. ϕ est définie p.p
2. ϕ est localement stable, $T-$périodique
3. Le $n-$ième coefficient de Fourier de s vaut $\frac{1}{T}\hat{s}(\frac{n}{T})$

Exercice 2.
Une source S sans mémoire délivre des 0 avec une probabilité de $p = 0,98$ et des 1 avec une probabilité de $1 - p = 0,02$. Le débit est de 300kBits/sec. La transmission se fait à travers un canal symétrique de probabilité d'erreur par élément binaire $0,05$, et fonctionnant avec un débit de 290kBits/sec.

1. Peut-on envisager d'utiliser ce canal pour transmettre le contenu de S avec une probabilité d'erreur aussi petite que souhaitée ?
2. Codage Source.
   On se propose de réduire le débit binaire de la source d'au moins 50% grâce à un code de Huffman. On suppose que les bits produit par la source S sont ensuite traité par le codeur Huffman qui définit ainsi une sourceS'.
   (a) Calculer l'entropie de la source S.
   (b) Quel doit être l'ordre minimum de l'extension de la source S permettant d'assurer une telle performance ?
   (c) Contruire un arbre de Huffman associé à l'extension 3 de la source.
   (d) Quelle est la valeur du débit moyen de la nouvelle binaire obtenue à partir du codage précédent ?
   (e) Combien doit-on ajouter de bits de contrôle par bit émis par la nouvelle source S' si on veut utiliser le canal à son débit nominal[1] de 290kBits/sec.
3. Codage canal.
   On souhaite maintenant coder la source binaire S' construite par algorithme de Huffman dans la partie précédente afin de réduire le taux d'erreur dues à la transmission à travers le canal. Supposons que l'on ajoute à chaque couple de bits émi par S' trois bits de contrôle.
   (a) Si on exige du code qu'il corrige une erreur par mot (de 5 bits), quelle doit être la valeur minimum de sa distance minimum ?En déduire le nombre minimal de 1 dans les mots du code.
   (b) Construire la matrice permettant de calculer un syndrome qui indique la position d'une erreur dans la 5 bits.
   (c) En déduire le code en indiquant pour chaque mot de S' le mot codé correspodant.

---

[1]nominal=optimal

(d) Construire la table de décodage, c'est-à-dire le tableau qui indique l'opération de correction en fonction du syndorme observé. Combien de configuration à deux erreurs permet-elle de corriger ? (Compter les syndrômes qui ne peuvent être obtenus avec une seule erreur)

(e) Calculer la probabilié d'erreur par mot code résultant de ce codage. Comparer cette valeur avec celle qui serai obtenue si on transmettait directement (i.e. sans codage les mots de l'extension d'ordre deux de la source S'.

Exercice 3.

On considère le signal numérique $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ défini par :

$$u_k = \begin{cases} a^k \sin(\theta k) & \text{si } k \geqslant 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On suppose que $\theta \neq 0[\pi]$.

1. Caluler $U(z)$ la transformée en z de u.
2. Donner le rayon de convergence de la série ainsi obtenue.
3. Mettre $U(z)$ sous les formes fractionnaires suivantes :

$$U(z) = \frac{N(z^{-1})}{D(z)} = \frac{N(z^{-1})}{D_1(z^{-1})D_2(z^{-1})}.$$

4. On considère maintenant que u est une réponse impulsionnelle $H(z) = U(z)$, $h_n = u_n$. Donner les zéros et les pôles de la fonction de transfert H.
5. Trouver de deux manières différentes une condition sur a pour que le filtre h soit stable.
6. Déterminer un algorithme non-récursif et un algorithme récursif associé au filtre h (on entend par "algorithme" l'équation permettant de calculer la sortie lorsque l'entrée est connue).
7. Donner les deux représentations correspondantes sous forme de schéma bloc du filtre h.
8. Donner l'expression de la réponse en fréquence du filtre. Calculer la réponse pour trois valeurs judicieusement choisies.
9. Dans cette question seulement, on se donne pour valeurs $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $a = \frac{1}{2}$.(Essayer de ne pas passer trop de temps sur cette question)
   (a) Tracer grossièrement la réponse en fréquence du filtre, pour $f \in [0, \frac{1}{2}]$. Que représente la fréquence $\frac{1}{2}$ par rapport à la fréquence d'échantillonage ?
   (b) Le filtre est-il RIF ou RII ? Comment qualifieriez le comportement fréquentiel de ce filtre ?
10. On désire tranformer ce filtre en un filtre passe-bande h'. Plus précisément, on souhaite obtenir un filtre passe-bande autour de la fréquence centrale $\frac{1}{4}$ et tel que la réponse en fréquence soit nulle en zéro et en $\frac{1}{2}$.
   (a) Proposer une solution simple pour prendre en compte la contrainte sur la réponse en fréquence en 0 et $\frac{1}{2}$.
   (b) Déterminer, sans calcul, une valeur de θ pour satisfaire à la contrainte liée à la réponse en $\frac{1}{4}$.
   (c) Quelle va être l'influence du paramètre a sur la courbe de réponse en fréquence ?
   (d) Indiquer la fonction de transfert $H'(z)$ finalement obtenue.
11. Trouver une relation entre la réponse en fréquence en $1/4$ et le paramètre a. Montrer que deux valeurs de a conviennent pour que la réponse en fréquence en $1/4$ vaille 10. Expliquer pourquoi.