---

**Examen - Traitement numérique du signal - 2008**

*Les documents et calculatrices sont autorisés. La qualité de la rédaction et de la présentation entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

---

**Exercice 1. Echantillonage**
On échantillonne $e_r(t) = cos(2\pi rt)$ à une fréquence $f = 1/\Delta$.

1. Rappeler la signification de $\Delta$.
2. Montrer que deux signaux $e_r$ et $e_{r'}$ ont le même échantillonnage si $r\Delta - r'\Delta \in \mathbb{Z}$
3. Expliquer pourquoi et dans quel sens le théorème de Nyquist-Shannon et ses hypothèses garantissent l'unicité du $r$.

**Exercice 2. Codage de Huffman**
On considère le message

"ceciestuncodagedehuffman"

(on a supprimé les espaces et la ponctuation pour simplifier la construction).

1. Construisez un codage de Huffman du message (Il y a plusieurs codages de Huffman possibles). On indiquera à chaque noeud de l'arbre le poid de son "sous arbre".
2. Combien de bits seraient nécessaire pour transmettre le message sans codage ? (Plusieurs réponses possibles, précisez bien les hyopthèses.)
3. Combien de bits sont nécessaires après codage de Huffman ?

**Exercice 3. Codes correcteurs**
On considère le code linéaire de correction d'erreur décrit par le tableau ci-dessous :

| mots source | mots code |
|---|---|
| 000 | ?00 ? ? |
| 001 | 00101 |
| 0 ? ? | 010 ? ? |
| 011 | ? ?1 ?1 |
| 100 | 1001 ? |
| 101 | 101 ?1 |
| 110 | 1100 ? |
| 111 | 111 ? ? |

1. En utilisant l'hypothèse de linéarité, remplacer les « ? » par les éléments binaires manquant (« 0 » ou « 1 »).
2. Expliciter la matrice génératrice du code.
3. Quel est l'image d'une séquence $[abc]$, où $a, b, c$ sont des nombres binaires dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ?
4. En déduire deux relations simples caractérisant les composantes des mots du code.
5. On note les vecteurs sous forme de colones. Expliquer pourquoi la matrice de contrôle permettant de générer le syndrome est de taille 2.

6. Déduire des trois questions précédentes une matrice de contrôle.
7. Combien ce code corrige-t-il d'erreurs ?

**Exercice 4. Etude et synthèse de filtres numériques RIF**

1. Analyse d'un filtre numérique
   On considère un système numérique caractérisé par :
   $$H(z) = K.[1 - z^{-10}]; K > 0$$
   (a) Donner l'algorithme de filtrage et la réponse impulsionnelle de ce système.
   (b) Ce filtre est-il stable ? justifier votre réponse.
   (c) Est-il à phase linéaire ? justifier votre réponse.
   (d) Réponse en fréquence du système :
      i. Calculer $|H(e^{i\omega}|$ et $j(\omega) := arg\,(H(e^{i\omega}))$.
      ii. Déterminer les fréquences $f_{max}$ et $f_{min}$ pour lesquelles on obtient les valeurs respectivement maximales ($H_{max}$ ) et minimales ($H_{min}$) de $|H(e^{i\omega})|$.
      iii. Déterminer la valeur de $K$ qui normalise $H_{max}$ à l'unité.
      iv. Dessiner l'allure de $|H(e^{i\omega})|$ pour cette valeur de $K$.
2. Synthèse d'un filtre RIF passe-bas

   On désire réaliser un filtre numérique passe-bas dont la fréquence de coupure est $f_e/3$, où $f_e$ est la fréquence d'échantillonnage.
   (a) Donner le graphe de la réponse en fréquence $G(f)$ du filtre idéal à phase nulle répondant a ce cahier des charges.
   (b) Déterminer la réponse impulsionnelle $g_k$ du filtre idéal non causal à phase nulle par développement en séries de Fourier de $G(f)$.
   (c) On décide de fixer la longueur du filtre à $N$ termes. Montrer que ce choix permet de rendre le RIF causal et donner l'algorithme de filtrage.