Examen - Traitement numérique du signal - 2009

Les documents et calculatrices sont autorisés. La qualité de la rédaction et de la présentation entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1. (Synthèse d'un filtre RIF passe-bas)
On veut réaliser un filtre passe-bas numérique à réponse impulsionnelle finie à $N = 17$ coefficients. La fréquence de coupure est : $fc = fe/4$ avec $fe = 1$ fréquence d'échantillonnage. On suppose que le théorème de Shannon est respecté.

1. Donner l'allure de la réponse en fréquence $H(\omega)$ sur $[-\pi, \pi]$ du filtre idéal non causal à déphasage nul correspondant au cahier des charges.
2. Déterminer $(\tilde{h}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ la réponse impulsionnelle du filtre idéal à phase.
3. Effectuer la troncature puis rendre causal cette réponse impulsionnelle et donner les coefficients du filtre finalement obtenu.
4. Donner l'expression de l'amplitude de la réponse fréquentielle du filtre obtenu en fonction des coefficients.
   Esquisser l'allure de la réponse fréquentielle.
5. Quels sont les effets de la troncature de $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ sur la réponse en fréquence du filtre synthétisé ? Comment pourrait-on améliorer les résultats ?

Exercice 2. (Etude d'un filtre)
Dans cet exercice, on étudie un filtre donné par un schéma-bloc.

1. On considère tout d'abord une sous-partie du filtre. Cette sous-partie est le filtre représenté par le schéma-bloc représenté Fig. 1. Le bloc " $\times\, g$" représente la multiplication par un réel g donné.
   Donner, en fonction de g, l'expression de la fonction de transfert $H'(z)$ de cette sous-partie du filtre.
2. On considère maitenant le filtre complet, repésenté par le schéma-bloc représenté Fig. 2. Le bloc " $\times\, b$" représente la multiplication par un réel b donné. Donner, en fonction de a, g et b, l'expression de la fonction de transfert $H(z)$ du filtre complet.
3. Sous quelle condition le filtre complet est-il stable ?
4. On suppose que les coefficients du filtre vérifient les relations :
   $$a = 1 - g^2,\ b = -g.$$
   Montrer que le module de la réponse fréquentielle est constant.
5. Pourquoi, à votre avis, appelle-t-on se filtre "réverbérateur" ?

Exercice 3. (Codage de Huffman)
On considère l'alphabet $S = s1, s2, s3, s4, s5, s6, s7, s8$ avec la distribution de fréquences f suivante :

s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8
$0,4$	$0,18$	$0,1$	$0,1$	$0,07$	$0,06$	$0,05$	$0,04$

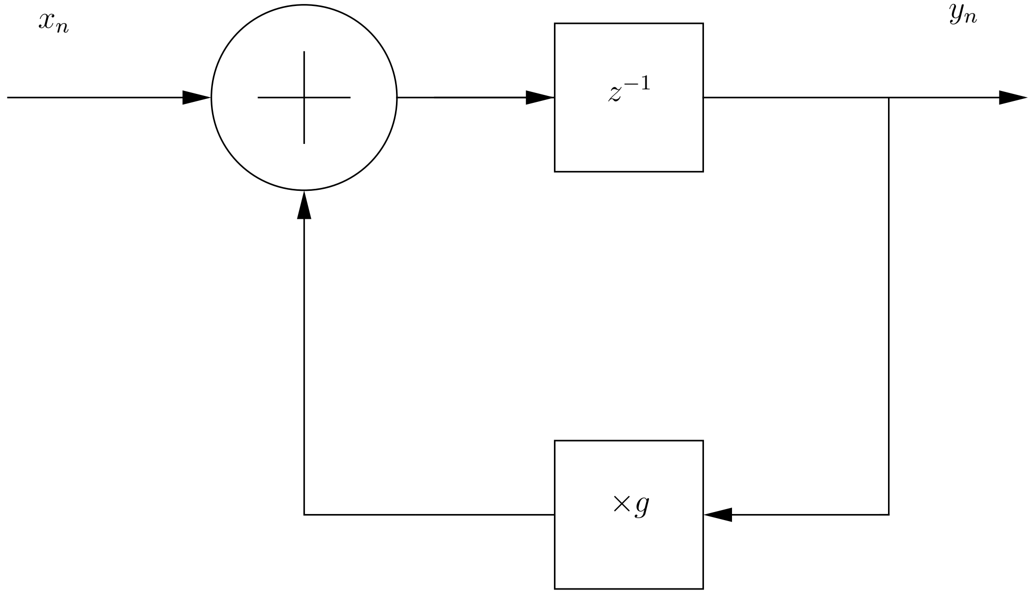

FIG. 1 – Sous-partie du filtre

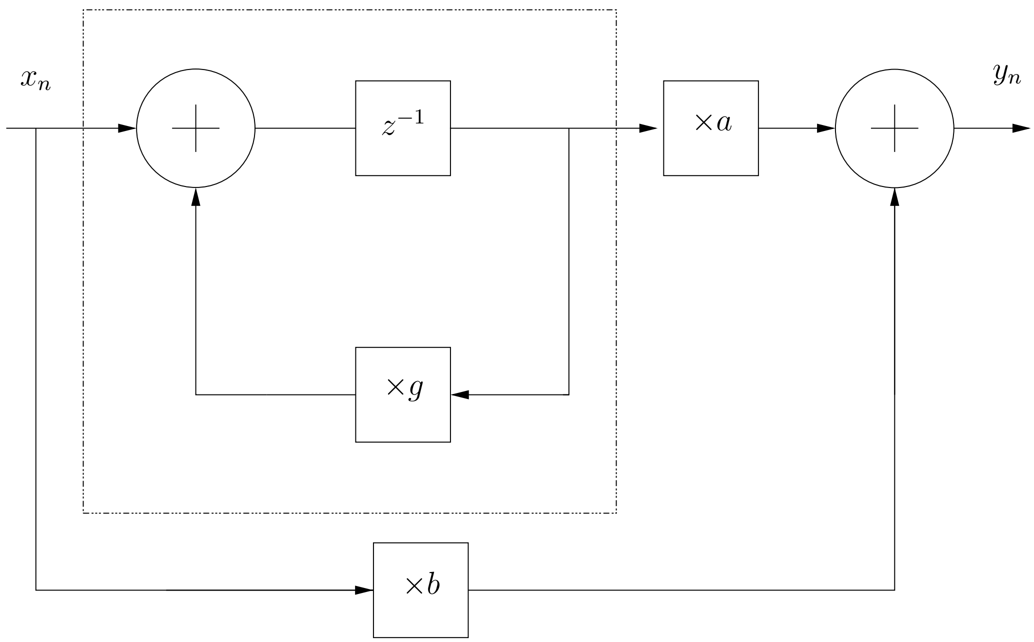

FIG. 2 – Filtre complet

1. Calculer l'entropie de la source d'information S.
2. Calculez un codage de Huffman de cette source, puis la longueur moyenne de ce codage. Comparez cette longueur moyenne à l'entropie.

Exercice 4. (Borne de Hamming)
On considère un alphabet A comprenant s symboles. Pour tout mot w appartenant A^n, on définit :
– la boule de centre w et de rayon k : $B(w,k) = \{v \in A^n; d(w,v) \leqslant k\}$
– la sphère de centre w et de rayon k : $S(w,k) = \{v \in A^n; d(w,v) = k\}$

1. Exemple : $s = 2$, soit $w = 0110 \in \{0,1\}^4$, déterminer $S(w,1), S(w,2)$, et $B(w,2)$.
2. Déterminer le nombre d'éléments de $S(w,k)$.

3. Montrer que

$$\operatorname{Card}(B(w,k)) = C_n^0(s-1)^0 + C_n^1(s-1)^1 + C_n^2(s-1)^2 + \ldots + C_n^k(s-1)^k = \sum_{i=0}^{k} C_n^i(s-1)^i.$$

4. Soit $C \in A^n$ un code correcteur des mots de A^p (bien sûr $p < n$) et de distance d. On note $t = E((d-1)/2)$: c'est le nombre d'erreurs que peut corriger C.
   (a) Quel est le nombre de mots de C ?
   (b) Montrer que si w_1 et w_2 sont deux mots distincts de C, alors $B(w_1,t) \cap B(w_2,t)$ est vide.
   (c) En déduire l'inégalité de Hamming :

$$\sum_{i=0}^{t} C_n^i(s-1)^i \leqslant s^{n-p}.$$

5. Applications : On appelle code parfait un code tel qu'on ait l'égalité

$$\sum_{i=0}^{t} C_n^i(s-1)^i = s^{n-p}.$$

   Dans ce cas, les boules $B(w,t), w \in C$, forment une partition de A^n. Dans les questions qui suivent, on considère seulement le cas $s = 2$.
   (a) Montrer que le code binaire par triplement ($n = 3, p = 1$) et de distance 3 est un code parfait. Même chose pour le code binaire de Golay de taille $n = 23, p = 12$ et de distance 7.
   (b) Soit C un code binaire de taille $n = 12, p = 5$. En utilisant l'inégalité de Hamming, donner une majoration de sa distance.