Université Paris-Dauphine
UFR MIDO-M1

Année 2009-2010

Examen - Traitement numérique du signal - Janvier 2010

Les documents et calculatrices sont autorisés. La qualité de la rédaction et de la présentation entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1.(Questions courtes)

1. Citer deux propriétés de la transformée de Fourier d'une fontion $L^1(\mathbb{R})$
2. Une source uniforme discrète émet des valeurs comprise entre -30 et 50. On souhaite la quantifier sur 3 bits. Proposer une procédure de quantification. Quelles sont les valeurs obtenues après quantification ?
3. Un codage source a pour mots :
$$\{0001, 1, 010, 001, 011\}.$$
   (a) Ce code est-il préfixe (i.e. auto-ponctué) ?
   (b) Si oui, dessiner l'arbre correspondant. Sinon, indiquer une modification simple le rendant auto-ponctué.
4. Citer deux exemples de support d'information binaire. On précisera sous quelle forme est codée l'information.
5. On se donne un entier naturel N, une suite finie de N nombres réels $(a_0, a_1, ..., a_{N-2}, a_{N-1})$ et un nombre réel ω. On considère le nombre A défini par :
$$A = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + ... + a_{N-1}\omega^{(N-1)}.$$
   Quel est le nombre minimal de multiplications à effectuer pour calculer la valeur de A ?

Exercice 2.(Codage de Huffman)
Une source sans mémoire S génère des symboles A, B, C, D, E, F et G avec les probabilités respectives 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/4, 1/4, 1/4.

1. Réaliser un codage de Huffman des 7 symboles de S.
2. Comparer le nombre moyen $\bar{n}$ d'éléments binaires utilisés par ce code pour représenter un symbole de S avec l'entropie de S.
3. Est-il intéressant de coder les extensions de S plutot que S ? Si oui, pourquoi ? Sinon jusitifer.

Exercice 3.(Un code correcteur)
On considère le code linéaire dont les mots sont constitués de deux éléments binaires d'information (a_1, a_2) et trois éléments binaires de contrôle (a_3, a_4, a_5) tels que :

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 \\ a_4 &= a_2 \\ a_5 &= a_1 + a_2 \end{aligned}$$

1. Expliciter les mots du code à l'aide d'un tableau, en attribuant à chaque couple de bits d'une source binaire un mot code constitué de 5 éléments binaires.
2. Combien d'erreurs détecte ce code ? Combien d'erreurs corrige ce code ?
3. Donner l'expression de la matrice génératrice G et de la matrice de contrôle H.
4. Construire une table de décodage indiquant les configurations d'erreurs effectivement corrigées : on demande précisément un tableau qui indique les corrections à effectuer en fonction du syndrôme observé. On ne considérera que les syndrômes donnant lieu à une correction exacte.
5. On transmet ces mots de code sur un canal binaire symétrique de probabilité d'erreur $p = 10^{-2}$. Calculer la probabilité d'erreur par mot codé résultant de l'utilisation de la table de décodage. Comparer avec la probabilité d'erreur qui résulterait d'une transmission directe (sans codage) des mots source constitués de deux éléments binaires.

Exercice 4.(Transmission d'un signal)
On dispose d'un canal C de transmission dont le débit est de 36 000 bits/s.

1. On souhaite transmettre un son dans ce canal. Sachant que la fréquence maximale contenue dans le son que l'on souhaite transmettre est $F_{max} = 2.3kHz$, proposer une valeur minimale pour la fréquence d'échantillonnage F_e.
2. Pour cette fréquence et ce canal, sur combien de bits au maximum peut-on quantifier le signal ?
3. Avec ce nombre de bits, sur combien de valeurs sera quantifié le signal ?
4. On souhaite maintenant utiliser ce canal pour transmettre l'information émise par une source binaire S émettant des symboles "0" et "1" avec un débit de 64 000 bits/s. Cette source émet un "0" avec une probabilité de $p_0 = 0.1$ et un "1" avec une probabilité $p_1 = 0.9$. Peut-on utiliser le canal C pour transmettre l'information de S ?
5. Quelle extension de S doit-on coder ?

Exercice 5.(Etude d'un filtre)

Soit un filtre défini par la formule suivante :

$$y_n - y_{n-1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1} - x_{n-2} - x_{n-3}). \qquad (\star)$$

1. Calculer les 8 premiers termes $y_0, ..., y_7$ de la réponse impulsionelle. En déduire son expression complète.
2. Calculer la réponse en fréquence (aussi appellée réponse fréquentielle) $H(e^{i\omega})$. Tracer $|H(e^{i\omega})|$ pour $\omega \in [0, \pi]$. Comment qualifieriez-vous ce filtre ?
3. Est-il à phase linéaire ?
4. Montrer que l'on peut réecrire l'équation $(\star)$ de telle sorte que le filtre apparaisse comme un filtre à réponse impulsionnelle finie.