Université Paris-Dauphine Année 2010-2011
UFR MIDO-M2 EDP-MAD

Examen - Introduction au calcul scientifique et à l'analyse - 2010/2011

On justifiera **CHAQUE** *réponse.*

Exercice 1. Transport à vitesse constante.
Soit $u^0 \in L^\infty$. On considère le problème :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u = 0, \ \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u^0(x), \end{cases} \quad (\star)$$

On souhaite calculer une approximation de la solution de cette équation. On se donne des pas de temps et d'espace Δt et Δx et on considère le schéma suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \tag{1}$$

avec comme donnée initiale $u_j^0 = u^0(j\Delta x)$.

1. Donner une solution de l'équation $(\star)$.
2. Montrer que, sous un certaine condition (que l'on précisera) sur Δt et Δx, u_j^{n+1} s'écrit comme une combinaison convexe de u_j^n et u_{j-1}^n.
3. En déduire que, si la condition précédente est vérifiée, la suite à double indice $(u_j^n)_{j\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   On suppose maintenant de plus que u^0 est de classe $\mathcal{C}^3$ et bornée.
4. Montrer que (1) est consistant d'ordre 1 en temps et en espace avec $(\star)$.
5. Soit e_j^n l'erreur définie par : $e_j^n = u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t)$. Montrer que

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}}(|e_j^n|) \leqslant Cn\Delta t(\Delta t + \Delta x).$$

   Qu'en déduit-on ?
6. Montrer que (1) est consistant d'ordre 2 avec l'équation :

$$\partial_t u + \partial_x u = \kappa \partial_{xx}^2 u,$$

   où κ est le coefficient $(\Delta x - \Delta t)/2$. Indice : on remarquera que la solution u de $(\star)$ vérifie $\partial_{xx}^2 u = \partial_{tt}^2 u$.

Exercice 2. Caractéristiques
On considère l'équation aux dérivées partielles

$$\partial_t u + c\partial_x u = u$$

avec la donnée initiale $u(0,x) = u_0(x)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $c \in \mathbb{R}$.

1. Calculer les courbes caractéristiques associées à cette équation (sans second membre).
2. Montrer que la solution, si elle existe, vérifie sur les caractéristiques une équation différentielle ordinaire que vous indiquerez.

3. Déuisez-en l'expression de la solution (si elle existe) et vérifiez que cette expression est bien solution du problème.

Exercice 3. Étude d'un schéma pour l'équation de la chaleur

On considère le problème aux dérivées partielles :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \partial_t u - \partial_{xx}^2 u & = & 0,\ \forall (x,t) \in [0,1] \times [0,T], \\ u(t,0) & = & u^0(t,1) = 0, \\ u(0,x) & = & u^0(x) \in L^2(0,1). \end{array}\right.$$

Pour calculer une approximation de la solution de ce problème, on considère le schéma suivant :

$$\frac{3u_j^{n+1} - 4u_j^n + u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

avec $j = 1, ..., M$, $M\Delta x = 1$, $n = 0, ..., N$, $N\Delta t = T$, $u_j^0 = u^0(j\Delta x)$ $u_j^1 = u(j\Delta x, \Delta t)$ que l'on suppose connu, $u_0^n = u_{M+1}^N = 0$.

1. Montrer que le schéma est consistant d'ordre 2 en temps et en espace.
2. Mettre la schéma sous forme matricielle, en utilisant la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et pour $k = n-1, n, n+1$, les vecteurs

$$U^k = \begin{pmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_M^k \end{pmatrix}$$

3. En posant :

$$V^k = \begin{pmatrix} U^k \\ U^{k-1} \end{pmatrix}$$

mettre le schéma sous la forme :

$$V^{n+1} = MV^n,$$

où M est une matrice que l'on exprimera en fonction de A.

4. Montrer que μ est valeur propre de M si et seulement si $\mu^2 - 4\alpha\mu + \alpha = 0$, où α est une valeur propre de la matrice $\left(3I + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} A\right)^{-1}$.
5. On dira que le schéma est stable si toutes les valeurs propres de M sont de valeurs absolues strictement inférieures à 1. Montrer que le schéma est stable. Indice : les valeurs propres de la matrice A sont données par

$$\lambda_j = 4\sin^2\left(\frac{j\pi}{2(M+1)}\right),\ j = 1, ..., M.$$

Exercice 4. Une équation elliptique

On considère l'équation :

$$-\Delta u(x) + u(x) = f(x), \ \ x \in [0,1] \tag{2}$$

avec $f \in L^2$ et des conditions de Dirichlet homogènes en $x = 0$ et $x = 1$.

1. Donner une formulation variationnelle de l'équation (2).
2. Démontrer l'existence et l'unicité de la solution.
3. On se donne une base $\mathcal{B}$ de fonctions de $H_0^1(0,1)$, $\mathcal{B} = Vect(\varphi_i)_{i=1,\dots,M}$. Décrire la méthode de Galerkin associée à cette base.
4. On se donne un maillage uniforme $(x_j)_{j=0,\dots,M+1}$, avec $x_0 = 0$, $x_{M+1} = 0$, $x_j = j\Delta x$, $(M+1)\Delta x = 1$ Dans le cas où $\mathcal{B}$ est la base d'élément fini P^1, c'est-à-dire que les fonctions φ_i sont affines par morceaux et vérifient

   $$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

   pour $j = 1, ..., M$. Calculer la matrice associée à la méthode de Galerkin.