Université Paris-Dauphine
UFR MIDO-M1 Année 2012-2013

Examen final - Analyse fonctionnelle approfondie

On justifiera **CHAQUE** *réponse.*

Exercice 1.

1. Vérifier que dans tout espace métrique une suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence est convergente.
2. Soit E un espace de Banach. On suppose u linéaire continue de E dans lui-même et v une application compacte de E dans lui-même. Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ sont compactes.
3. Soit F une partie équicontinue de $\mathcal{C}(X;Y)$. On suppose X compact. Montrer que F est uniformément équicontinue sur X.

Exercice 2.
On considère la fonctionnelle

$$J(u) = \int_0^1 u'(x)^2 dx + \int_0^1 \arctan(u(x)) dx,$$

où u est une fonction appartenant à $H_0^1(0,1)$. On rappelle que, grâce à l'inégalité de Poincaré, cet espace est un espace de Hilbert pour la norme :

$$\|u\|_{H_1^0} = \sqrt{\int_0^1 u'(x)^2 dx}.$$

1. Montrer que J est minorée.
2. On considère une suite minimisante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que cette suite est bornée dans $H_0^1(0,1)$.
3. Montrer qu'on peut extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergeant faiblement dans $H_0^1(0,1)$. On note v cette limite.
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.
5. Montrer qu'on peut extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergeant dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On note u cette limite.
6. Montrer que $u = v$.
7. Montrer que $\|u\|_{H_1^0}^2 \leqslant \liminf \|u_n\|_{H_1^0}^2$.
8. En déduire l'existence d'une solution au problème de minimisation.
9. Quelle équation variationnelle est vérifiée par u ?
10. Montrer que $u \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$.
11. En déduire une équation vérifiée par u.

Exercice 3.
On s'intéresse à l'équivalence

$$\sum |a_n| < +\infty \Leftrightarrow \left(\forall (b_n)_n / |\sum b_n| < +\infty, \quad \sum_n c_n \text{ converge avec } c_n = a_0 b_n + \cdots + a_n b_0 \right).$$

1. Rappeler pourquoi l'un des deux sens est facile (sans démonstration).
   Nous allons montrer la réciproque. Soit E l'ensemble des suites réelles convergentes. On munit E de la norme $\|.\|$ définie de la façon suivante : pour une suite $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
   $$\|b\| = \sup_n(|B_n|),$$
   avec $B_n = b_0 + \cdots + b_n$, la somme partielle de rang n.
2. Montrer que l'application :
   $$\varphi(b) \mapsto B = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$$
   définie de E muni de $\|.\|$ dans l'ensemble des suites convergentes muni de $\|.\|_\infty$ la norme infinie est une isométrie surjective sur un Banach (On ne redémontrera pas que la norme inifinie rend l'espace des suites convergentes complet).
3. En déduire que E muni de $\|.\|$ est également un Banach.
   Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que la condition de droite de l'équivalence considérée soit vraie.
4. Soit L_n la forme linéaire définie sur E par
   $$L_n(b) = c_0 + \cdots + c_n,$$
   où les c_n sont définis dans la condition de droite de l'équivalence.
5. Montrer que l'on a
   $$L_n(b) = a_0 B_n + \cdots + a_n B_0.$$
6. Montrer pour b fixée dans E,
   $$\sup_{n\in\mathbb{N}} (|L_n(b)|) < +\infty.$$
7. En appliquant le théorème de Banach-Steinhaus (dont on précisera bien le cadre d'application), montrer que :
   $$\sup_{n\in\mathbb{N}} |||L_n||| < +\infty.$$
8. En choisissant une famille de suites b^k particulières, montrer finalement l'implication inverse.