Université Paris-Dauphine Année 2012-2013
UFR MIDO-M1

Examen final - Analyse fonctionnelle approfondie

On justifiera **CHAQUE** *réponse.*

Exercice 1.

1. Vérifier que dans tout espace métrique une suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence est convergente.
   <u>Correction :</u> soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence u. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que :
   $$\forall p, q \leqslant N, \ \|u_p - u_q\| \leqslant \varepsilon.$$
   Ceci étant vrai pour tout $q \leqslant N$, c'est vrai en particulier et à partir d'un certain rang pour les termes d'une sous-suite convergeant vers u. On peut donc passer à limite sur $q = \varphi(n)$ et on obtient le résultat recherché.
2. Soit E un espace de Banach. On suppose u linéaire continue de E dans lui-même et v une application compacte de E dans lui-même. Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ sont compactes.
   <u>Correction :</u> soit B une partie bornée. Il suffit de montrer que $u \circ v(B)$ et $v \circ u(B)$ sont relativement compactes. Or, une application linéaire continue envoie une partie bornée sur une partie bornée, et une application compacte envoie une partie bornée sur une partie relativement compacte. On a donc immédiatement les résultats.
3. Soit F une partie équicontinue de $\mathcal{C}(X;Y)$. On suppose X compact. Montrer que F est uniformément équicontinue sur X.
   <u>Correction :</u> puisque F est équicontinue
   $$\forall x_0 \in X, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta, \ \forall u \in F, \ |x - x_0| \leqslant \eta \Rightarrow |u(x) - u(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$
   Supposons que la famille ne soit pas uniformément équi-continue, alors, on peut trouver deux suites $(x_n)_{n\in N}$ et $(x'_n)_{n\in N}$, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F et un réel $\nu > 0$ telles que :
   (a) $x_n - x'_n \to 0$,
   (b) $u_n(x_n) - u_n(x'_n) \geqslant \nu$.
   Par compacité, on peut extraire simultanéement de $(x_n)_{n\in N}$ et $(x'_n)_{n\in N}$ deux sous-suites convergeant vers x. En choisissant $\varepsilon = \frac{\nu}{3}$ et N assez grand, on utilise l'équi-continutité pour montrer que :
   $$|u_n(x_n) - u_n(x'_n)| \leqslant |u_n(x_n) - u_n(x)| + |u_n(x) - u_n(x'_n)| \leqslant \frac{2}{3}\nu,$$
   ce qui contredit la condition (b).

Exercice 2.
On considère la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)^2 dx + \int_0^1 \arctan\left(u(x)\right) dx,$$

où u est une fonction appartenant à $H_0^1(0,1)$. On rappelle que, grâce à l'inégalité de Poincaré, cet espace est un espace de Hilbert pour la norme :

$$\|u\|_{H_1^0} = \sqrt{\int_0^1 u'(x)^2 dx}.$$

1. Montrer que J est minorée.

   <u>Correction :</u> *la fonction* arctan *étant minorée par* $-\frac{\pi}{2}$, *on a* $J(u) \geqslant -\frac{\pi}{2}$.
2. On considère une suite minimisante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que cette suite est bornée dans $H_0^1(0,1)$.

   <u>Correction :</u> *on a* $J(u) \geqslant \frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)^2dx - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\|u(x)\|_{H_0^1}^2 - \frac{\pi}{2}$, *donc* J *est coercive. Donc* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est nécessairement bornée.*
3. Montrer qu'on peut extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergeant faiblement dans $H_0^1(0,1)$. On note v sa limite.

   <u>Correction :</u> *puisque* $H_0^1(0,1)$ *est un espace de Hilbert, une suite bornée admet forcément un sous-suite faiblement convergente.*
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

   <u>Correction :</u> *d'après l'inégalité de Sobolev, on a l'existence d'un* C *tel que* $\|u_n\|_{\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})} \leqslant C\|u_n\|_{H_0^1(0,1)}$, *ce qui donne le résultat.*
5. Montrer qu'on peut extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergeant dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On note u cette limite.

   <u>Correction :</u> *notons* M *la borne* $H_0^(0,1)$ *de la suite. De plus cette suite est une partie fermée (la limite uniforme d'une fonction continue est toujours continue). Enfin, on peut appliquer Ascoli puisque* $\forall x, y,\ |u_n(x) - u_n(y)| \leqslant \int_x^y |u'| \leqslant M\sqrt{|x-y|}$.
6. Montrer que $u = v$.

   <u>Correction :</u> *la suite convergeant à la fois dans* $H_0^1(0,1)$ *et dans* $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, *on en déduit quelle converge faiblement dans* L^2 *vers* u *et* v. *Par unicité de la limite faible, on a le résultat.*
7. Montrer que $\|u\|_{H_1^0}^2 \leqslant \liminf \|u_n\|_{H_1^0}^2$.

   <u>Correction :</u> *la fonctionnelle* $G(u) = \|u\|_{H_1^0}^2$ *étant s.c.i, convexe, on peut lui appliquer le résultat du cours.*
8. En déduire l'existence d'une solution au problème de minimisation.

   <u>Correction :</u> *puisque* arctan *est lipschitzienne, la convergence uniforme de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *implique la convergence uniforme de* $(\arctan(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$. *En combinant ce résultat avec l'inégalité précédente, on obtient* $J(u) \leqslant \liminf J(u_n)$, *donc* u *est bien la solution du problème de minimisation.*
9. Quelle équation variationnelle est vérifiée par u ?

   <u>Correction :</u> *les deux termes de la fonctionnelle étant Gateaux-différentiables, et le point* u *étant un minimum, on obtient*

   $$\forall v \in H_0^1(0,1),\ \int_0^1 u'v' + \int_0^1 \frac{v}{1+u^2} = 0.$$
10. Montrer que $u \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$.

    <u>Correction :</u> *on déduit de la formulation variationnelle précédente que* u' *admet une dérivée faible dans* $L^2(0,1)$, *donc est dans* $H_0^1(0,1)$. *Donc* u *appartient à* $H^2(0,1)$ *et* u' *est une primitive de* $\frac{1}{1+u^2}$ *qui est continue. Donc* u' *est de classe* $\mathcal{C}^1$. *D'où le résultat.*

11. En déduire une équation vérifiée par u.
<u>Correction :</u> *On déduit par intégration par parties que u vérifie*

$$u'' + \frac{1}{1+u^2} = 0,\ u(0) = u(1) = 0.$$

Exercice 3.
On s'intéresse à l'équivalence

$$\sum |a_n| < +\infty \Leftrightarrow \left(\forall (b_n)_n / |\sum b_n| < +\infty, \quad \sum_n c_n \text{ converge avec } c_n = a_0 b_n + \cdots + a_n b_0 \right).$$

1. Rappeler pourquoi l'un des deux sens est facile (sans démonstration).
<u>Correction :</u> *le sens* ($\Rightarrow$) *est une conséquence directe du résultat sur les produits de Cauchy des séries (parfois appelé "théorème de Mertens").*
Nous allons montrer la réciproque. Soit E l'ensemble des suites réelles convergentes. On munit E de la norme $\|.\|$ définie de la façon suivante : pour une suite $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\|b\| = \sup_n(|B_n|),$$

avec $B_n = b_0 + \cdots + b_n$, la somme partielle de rang n.
2. Montrer que l'application :

$$\varphi(b) \mapsto B = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

définie de E muni de $\|.\|$ dans l'ensemble des suites convergentes muni de $\|.\|_\infty$ la norme infinie est une isométrie surjective sur un Banach (On ne redémontrera pas que la norme inifinie rend l'espace des suites convergentes complet).
<u>Correction :</u> *on démontre immédiatement* $\|\varphi(b)\|_\infty = \|b\|$, *donc* φ *est bien une isométrie. Elle est surjective : soit* B *une suite convergente. On définie* b *par* $b_0 = B_0$ *et* $b_n = B_n - B_{n-1}$ *pour* $n \geqslant 1$. *On a alors bien* $\varphi(b) = B$.
3. En déduire que E muni de $\|.\|$ est également un Banach.
<u>Correction :</u> *la propriété de complétude se transporte facilement de l'espace d'arrivé à l'espace de départ par* φ, *le raisonnement est le suivant. Soit* $(b^k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite de Cauchy. La suite* $\left(\varphi(b^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *est donc aussi de Cauchy, puisque* φ *est isométrique. Elle converge donc. La limite admet un antécédent* b *par* φ *qui est surjectif. Par isométrie,* $\|b^k - b\| = \|\varphi(b^k) - \varphi(b)\|_\infty \to 0$.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que la condition de droite de l'équivalence considérée soit vraie.
4. Soit L_n la forme linéaire définie sur E par

$$L_n(b) = c_0 + \cdots + c_n,$$

où les c_n sont définis dans la condition de droite de l'équivalence. Montrer que l'on a

$$L_n(b) = a_0 B_n + \cdots + a_n B_0.$$

<u>Correction :</u> *on a successivement*

$$L_n(b) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell} = \sum_{\ell=0}^{n} \sum_{k=\ell}^{n} a_\ell b_{k-\ell} = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \sum_{k=0}^{n-\ell} b_k = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell B_{n-\ell}.$$

5. Montrer pour b fixée dans E,
$$\sup_{n\in\mathbb{N}}(|L_n(b)|) < +\infty.$$
<u>*Correction :*</u> *puisque $b \in E$, $\sup_n(|B_n|) < +\infty$, donc la condition $|\sum b_n| < +\infty$ est bien vérifiée. Par hypothèse, $|\sum_n c_n| < +\infty$, ce qui équivaut, par définition de L_n, à dire que $\sup_{n\in\mathbb{N}}(|L_n(b)|) < +\infty$.*
6. En appliquant le théorème de Banach-Steinhaus (dont on précisera bien le cadre d'application), montrer que :
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |||L_n||| < +\infty.$$
<u>*Correction :*</u> *$(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'opérateurs définis sur un Banach. D'après le théorème de Banach-Steinhaus, il est ponctuellement borné, donc uniformément borné.*
7. En choisissant une famille de suite b^k particulière, montrer finalement l'implication inverse.
<u>*Correction :*</u> *pour $k \in \mathbb{N}$, on considère une b^k la suite telle que $B_n^k = signe(a_{k-n})$ pour $n = 0, \cdots, k$ et $B_n^k = 0$ sinon (on utilise ici la surjectivité, puisque B^k est une suite convergente). On a bien $L_n(b^n) = \sum_{k=0}^n |a_k|$ et $\|b^n\| = \sup_k(|B_k^n|) = 1$. On en déduit le résultat.*