Université Paris-Dauphine Année 2012-2013
UFR MIDO-M2 EDP-MAD

Examen - Introduction au calcul scientifique et à l'analyse - 2012/2013

On justifiera **CHAQUE** *réponse.*

Exercice 1. Méthodes de Galerkin.
On considère le problème elliptique :

$$\Delta u = f,$$

où f est une fonction continue sur $[0,1]$ et u est une fonction de $[0,1]$ à valeur dans $\mathbb{R}$. On complète ce problème par un des conditions de Dirichlet homogènes.

1. Écrire une formulation faible du problème en prenant comme espace de fonctions les fonction $\mathcal{C}^1(0,1)$.
2. On souhaite résoudre ce problème par une méthode d'éléments finis. On choisit comme élément $\mathbb{P}^1$. Sur quel système linéaire débouche cette méthode ? On définira un maillage uniforme de l'intervalle $[0,1]$. On écrira précisément les matrices et vecteurs intervenant dans la méthode.
3. Quelles auraient été les matrices et vecteur dans le cas de conditions de Neumann homogène ? Dans le cas de conditions périodiques ?
4. Qu'aurait donné une méthode par différences finies ?
5. Quelle est la matrice obtenue lorsqu'on prend pour base de Galerkin la famille :

$$E_N = (\sin(2\pi n x))_{n=1,\cdots,N}?$$

Exercice 2. Équation de la chaleur.
On considère l'équation de la chaleur :

$$\partial_t u - \partial^2_{x,x} u = 0,$$

complétée par les conditions aux bords :

$$u(t,0) = u(t,1) = 0, u(0,x) = u_0(x),$$

où u_0 est une condition initiale donnée. On souhaite le résoudre par le schéma :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

où on a utilisé les notations classiques pour les discrétisations en temps et en espace : $J\Delta x = 1$, $N\Delta t = T$ avec $T > 0$.

1. Montrer que ce schéma est explicite et inconditionnellement stable pour la norme ℓ^∞.
2. Calculer l'erreur de consistance du schéma. Sous quelle condition liant Δt et Δx ce schéma est-il convergent lorsque ces deux paramètres tendent vers 0 ?
3. Ce schéma est-il plus intéressant que le schéma explicite classique ?