Université Paris-Dauphine Année 2013-2014
UFR MIDO-M2 EDP-MAD

Examen - Introduction au calcul scientifique et à l'analyse - 2013/2014

On justifiera **CHAQUE** *réponse.*

Exercice 1. Méthodes de Galerkin.
On considère l'équation :

$$-\Delta u + \nu u = f,$$

avec des conditions aux bords de Neumann homogènes. On cherche une solution faible dans $H^1(0,1)$.

1. Quelle est la forme bilinéaire associée dans $H^1(0,1)$?
2. Pour résoudre le problème faible, on choisit dans un premier temps comme base de Galerkin la base de polynômes

$$B = (1, x, x^2, x^3, \cdots, x^{N-1}).$$

   Expliciter la matrice associée. Quel est l'inconvénent de cette base ?
3. Les éléments de la base précédente ne tiennent pas compte des conditions aux bords. Proposer une solution de modification de la base précédente prenant naturellement en compte ces conditions.
4. Reprendre la question 2 avec

$$B = (1, \sin(\pi x), \sin(2\pi x), \cdots, \sin((N-1)\pi x)).$$

   Commenter brievement le résultat.

Exercice 2. Un problème de contrôle optimal.
S'intéresse au problème :

$$c^\star = \mathrm{argmin}_{c \in L^2(0,T)} \left(\frac{1}{2}|y(T) - y_{cible}|^2 + \frac{1}{2}\alpha \int_0^T c(t)^2 dt \right),$$

où α est un réel strictement positif, la fonction y (l'état) est contrôlée par la fonction c sur $[0,T]$ selon l''équation :

$$\dot{y}(t) = y(t) + c(t).$$

1. Ce problème est-il convexe ?
2. Écrire le système d'optimalité associé à ce problème.
3. Résoudre explicitement le système.
4. Comment calculer le gradient de la fonctionnelle ?
5. Proposer une discrétisation du problème, et calculer le système d'optimalité associé (on ne demande pas de le résoudre).

Exercice 3. Méthodes numériques préservant certaines propriétés.

1. On considère une équation de Schrödinger en dimension finie :

$$\dot{y} = i(A + c(t)B)y,$$

où A et B sont des matrices symétriques à coefficients réels, et c est une fonction à valeur réelle donnée. Le schéma de Crank-Nicholson est alors :

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{dt} = i\left(A + c(t_{n+1/2})B\right)\left(\frac{y_{n+1} + y_n}{2}\right).$$

Montrer que ce schéma préserve la norme hermitienne $y \in \mathbb{C}^N \mapsto \bar{y}^T \cdot y =: \|y\|_2^2$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|y_n\|_2 = \|y_0\|_2$$

2. Soit l'équation d'advection diffusion sur le domaine $(t, x) \in [0, T] \times [0, L]$:

$$\partial_t m - \nu \partial^2_{xx} m + \partial_x(vm) = 0.$$

Décrivez précisément des conditions de bord et une discrétisation temps-espace préservant la norme 1 de m, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad dx \sum_{j=0}^{M} m_j^n = dx \sum_{j=0}^{M} m_j^0,$$

où m_j^n est une approximation de $m(j \cdot dx, n \cdot dt)$.

3. Soit le problème :

$$a_\mu(u, v) = f_\mu(v), \ \forall v \in H, \qquad (\star)$$

où μ est un vecteur de paramètres, H est un espace de Hilbert, a est une forme bilinéaire continue et coercive, f est une forme linéaire continue.

(a) Rappeler pourquoi cette équation admet une unique solution.

(b) On souhaite résoudre cette équation par une méthode de Galerkin : pour ce faire, on considère un espace d'approximation $H_N = Vect(e_1, ..., e_N)$. On suppose que pour un jeu de paramètres μ_0 fixé, u_{μ_0} la solution de $(\star)$ appartient à H_N. Montrer que l'approximation obtenue avec la méthode de Galerkin est la solution exacte.