Université Paris-Dauphine Année 2013-2014

UFR MIDO-M1

Examen final - Analyse fonctionnelle approfondie

On justifiera **CHAQUE** *réponse.*

Exercice 1.

1. On rappelle qu'un G_δ est un sous-ensemble d'un espace métrique qui peut s'écrire comme une intersection dénombrable d'ouverts. Donner un exemple de G_δ de $[0,1]$, dense dans $[0,1]$ et dont la mesure de Lebesgue est nulle.
2. Une intersection dénombrable de G_δ dense est-elle dense ? (justifier une réponse positive ou donner un contre-exemple)
3. Une intersection non-dénombrable de G_δ dense est-elle dense ? (justifier une réponse positive ou donner un contre-exemple)
4. Soit f une application définie sur un espace métrique complet (X,d), à valeurs réelles et semi-continue inférieurement. Montrer qu'il existe un ouvert non vide sur lequel f est majorée.
5. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites, telles que $x_n \to x$ et $y_n \rightharpoonup y$.
   (a) Montrer que $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.
   (b) On suppose seulement $x_n \rightharpoonup x$ et $y_n \rightharpoonup y$. Trouver un contre-exemple où $\langle x_n, y_n\rangle \not\to \langle x, y\rangle$.

Exercice 2.

La notation u' désigne la dérivée de la fonction u.

Soit $f \in L^2([0,1])$. On considère le problème de minimisation suivant :

$$\inf_{u\in H^1(0,1)} J(u),$$

avec $J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(t))^2 dt - \int_0^1 f(t)u(t)dt$.

1. On suppose que ce problème admet une solution u dans $H^1([0,1])$. Montrer que u vérifie

$$\begin{cases} -u'' &= f, \qquad \text{p.p.sur}[0,1], \\ u'(0) &= u'(1) = 0. \end{cases}$$

2. Montrer que u appartient en fait à $H^2([0,1])$.
3. Montrer que l'on a nécessairement

$$\int_0^1 f(t)dt = 0.$$

4. Réciproquement, on suppose dans toute la suite que f vérifie $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

(a) (Une inégalité générale) Montrer qu'on a :

$$\forall v \in H^1(0,1), \|v - m(v)\|_2 \leqslant \|v'\|_2,$$

avec

$$m(v) = \int_0^1 v(t)dt.$$

Indication : On pourra écrire la quantité à borner sous la forme d'une intégrale double.

(b) Montrer que $|\int_0^1 fv| \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_2^2 + \frac{1}{2}\|v - m(v)\|_2^2$.

(c) Déduire des questions précédentes que l'infimum du problème initial est fini.

(d) Monter que f admet une primitive F qui appartient à $L^2(0,1)$.

(e) Montrer que $J(v) \geqslant \|v'\|_2^2 + \frac{1}{2}\|F\|_2^2$.

(f) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minimisante pour ce problème. Montrer que les suites $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n - m(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans $L^2(0,1)$.

(g) En déduire que le problème considéré admet une solution.

(h) Y a-t-il unicité de cette solution ?