Université Paris-Dauphine Année 2013-2014
UFR MIDO-M1

Examen final - Analyse fonctionnelle approfondie

On justifiera **CHAQUE** *réponse.*

Exercice 1.

1. On rappelle qu'un G_δ est un sous-ensemble d'un espace métrique qui peut s'écrire comme une intersection dénombrable d'ouverts. Donner un exemple de G_δ de $[0,1]$, dense dans $[0,1]$ et dont la mesure de Lebesgue est nulle.
Correction : on peut par exemple prendre l'ensemble des rationnels de $[0,1]$*, qu'on écrit comme l'intersection des* $I_n = \cap_{m\in\mathbb{N}}]q_m - 1/n, q_m + 1/n[$ *(qui sont des ouverts).*

2. Une intersection dénombrable de G_δ dense est-elle dense ? (justifier une réponse positive ou donner un contre-exemple)
Correction : Une intersection dénombrable de G_δ *est* G_δ*, et un* G_δ *n'est dense que si les ouverts sont eux-mêmes denses. Le théorème de Baire permet de conclure.*

3. Une intersection non-dénombrable de G_δ dense est-elle dense ? (justifier une réponse positive ou donner un contre-exemple)
Correction : la réponse est NON. On peut par exemple écrire $\emptyset = \cap_{x\in]0,1[}\,(]0,1[-\{x\})$.

4. Soit f une application définie sur un espace métrique complet (X,d), à valeurs réelles et semi-continue inférieurement. Montrer qu'il existe un ouvert non vide sur lequel f est majorée.
Correction : d'après le théorème de Baire, une union dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide. On suppose qu'il n'existe pas de tel ouvert et on considère l'intersection $\cup_{n\in\mathbb{N}}\{f(x) \leqslant n\}$*. Chacun des intervalles est fermé puisque* f *est s.c.i. et d'intérieur vide par hypothèse. Or cette union est en fait tout l'espace, puisque* f *est à valeur dans* $\mathbb{R}$*. D'où l'absurdité.*

5. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites, telles que $x_n \to x$ et $y_n \rightharpoonup y$.
   (a) Montrer que $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.
   Correction : on utilise l'identité $\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle = \langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle$*. Le premier terme du membre de droite converge vers 0 par Cauchy-Schwartz et le second converge vers 0 par convergence faible de* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

   (b) On suppose seulement $x_n \rightharpoonup x$ et $y_n \rightharpoonup y$. Trouver un contre-exemple où $\langle x_n, y_n\rangle \not\to \langle x, y\rangle$.
   Correction : on peut par exemple considérer l'ensemble des suites de carrés sommables, et les deux suites x *et* y *avec* $x = y$ *et* $x_n = (\delta_{m,n})_{m\in\mathbb{N}}$*.*

Exercice 2.
La notation u' *désigne la dérivée de la fonction* u*.*

Soit $f \in L^2([0,1])$. On considère le problème de minimisation suivant :

$$\inf_{u \in H^1(0,1)} J(u),$$

avec $J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(t))^2 dt - \int_0^1 f(t)u(t)dt$.

1. On suppose que ce problème admet une solution u dans $H^1([0,1])$. Montrer que u vérifie

$$\begin{cases} -u'' &= f, \qquad \text{p.p.sur}[0,1], \\ u'(0) &= u'(1) = 0. \end{cases}$$

Correction : la fonctionnelle à minimiser est Gâteaux-différentiable car ses deux termes le sont. On a de plus :

$$d_G J(u)[h] = \int_0^1 u'(t)h'(t)dt - \int_0^1 f(t)h(t)dt = [u'(t)h(t)]_0^1 - \int_0^1 (u''(t) + f(t))h(t)dt.$$

Puisque u est solution, elle annule la dérivée de Gâteaux. On a donc nécéssairement u' nulle aux points 0 et 1 et $u'' + f$ est nulle p.p. sur $[0,1]$.

2. Montrer que u appartient en fait à $H^2([0,1])$.
Correction : u'' est, au signe près, partout égale à f qui est dans L^2, elle est elle-même dans L^2, ce qui revient à dire que u est dans H^2.

3. Montrer que l'on a nécessairement

$$\int_0^1 f(t)dt = 0.$$

Correction : on a $\int_0^1 f(t)dt = -\int_0^1 u''(t)dt = -u'(1) + u'(0) = 0$.

4. Réciproquement, on suppose dans toute la suite que f vérifie $\int_0^1 f(t)dt = 0$.
   (a) Montrer qu'on a :

$$\forall v \in H^1(0,1), \|v - m(v)\|_2 \leqslant \|v'\|_2,$$

avec

$$m(v) = \int_0^1 v(t)dt.$$

Indication : On pourra écrire la quantité à bornée sous la forme d'une intégrale double.
Correction : On a $|v(t) - m(v)| = |\int_0^1 v(t) - v(s)ds| = |\int_0^1 \int_s^t v'(x)dxds|$. On applique Cauchy-Schwartz à l'intégrale $\int_s^t v'(x)dx$, ce qui donne, en utilisant le fait que $|t - s| \leqslant 1$: $\int_s^t v'(x)dx \leqslant \|v'\|_2$. On obtient donc

$$|v(t) - m(v)|^2 \leqslant (\int_0^1 \|v'\|_2)^2 = \|v'\|_2^2.$$

D'où le résultat, en intégrant par rapport à t.

(b) Montrer que $|\int_0^1 fv| \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_2^2 + \frac{1}{2}\|v - m(v)\|_2^2$.
Correction : on utilise le fait que $\int_0^1 fv = \int_0^1 f(v - m(v))$ puis l'inégalité de Young.

(c) Déduire des questions précédentes que l'infimum du problème initial est fini.
Correction : on a $J(v) \geqslant \frac{1}{2}\|v - m(v)\|_2^2 - \int_0^1 fv = \frac{1}{2}\|v - m(v)\|_2^2 - \int_0^1 f(v - m(v)) \geqslant -\frac{1}{2}\|f\|_2^2$.

(d) Monter que f admet une primitive F qui appartient à $L^2(0,1)$.
Correction : on a, pour tout $t \in [0,1]$, $|F(t)| \leqslant \int_0^1 |f| \leqslant \|f\|_2$, donc F est bornée et donc bien dans $L^2(0,1)$.

(e) Montrer que $J(v) \geqslant \|v'\|_2^2 + \frac{1}{2}\|F\|_2^2$.
Correction : on a, en intégrant par parties le 2nd terme de J, $J(v) = \frac{1}{2}\|v'\|_2^2 + \int_0^1 Fv'$. On conclut par l'inégalité de Young.

(f) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minimisante pour ce problème. Montrer que les suites $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n - m(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans $L^2(0,1)$.
Correction : d'après la question précédente, $J(u_0) \geqslant J(u_n) \geqslant \|u_n'\|_2^2$. D'après une question précédente, $\|u_n - m(u_n)\|_2 \leqslant \|u_n'\|_2$. Donc les deux suites sont bornées.

(g) En déduire que le problème considéré admet une solution
Correction : on conclut par Ascoli. La suite $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, la famille $(u_n - m(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue. Elle est de plus bornée par la question précédente. Il existe donc une sous-suite convergente $(u_{n_k} - m(u_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$. Or $J(u_{n_k}) = J(u_{n_k} - m(u_{n_k}))$, puisque $\int_0^1 f(t)dt = 0$. Donc $(u_{n_k} - m(u_{n_k}))_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite minimisante.

(h) Y a-t-il unicité de cette solution ?
Correction : oui car la fonctionnelle est la somme d'une fonction strictement convexe et d'une fonction linéaire. Elle est donc strictement convexe.