Université Paris-Dauphine Année 2014-2015
UFR MIDO-M2 EDP-MAD

Examen - Introduction au calcul scientifique et à l'analyse - 2014/2015

On justifiera **CHAQUE** *réponse.*

Exercice 1. Bases réduites et EDO.
On considère une équation différentielle en temps sur $[0,T]$

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= (A+\mu B)y(t) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

où $y(t) \in \mathbb{R}^n$ avec n grand, A, B sont des matrices réelles carrées de taille $n \times n$ et μ un paramètre réel. On souhaite réduire ce système en choisissant pour nouvelle inconnue $z \in \mathbb{R}^m$ avec $m << n$. On pose ainsi $y_{red} = Pz$, où P est une matrice de n lignes et m colonnes. On omet la dépendance en μ dans la plupart des notations.

1. Comment réduire le système ? Proposer un système de petite dimension permettant de définir z de telle sorte que y_{red} soit une approximation de y.
2. On définit le résidu $r(t,\mu) = P\dot{z} - (A+\mu B)Pz(t)$ et l'erreur $e(t,\mu) = y(t) - Pz(t)$.
   (a) Donner une relation entre $r(t,\mu)$, $\dot{e}(t,\mu)$, $e(t,\mu)$.
   (b) Définir un estimateur d'erreur a posteriori de $e(T,\mu)$. On justifiera le qualificatif "a posteriori".
   (c) Donner un avantage de cet estimateur (a part qu'il soit a posteriori) et un inconvenient.

Exercice 2. Lemme de Cea ammélioré.
Soit a une forme biliénaire, et f une forme linéaire, toutes deux définies sur un espace de Hilbert V. On se donne un espace d'approximation de Galerkin V_h. On note u et u_h la solution du problème variationnel $a(u,v) = f(v), \forall v \in V$ et la solution de Galerkin $a(u_h, v_h) = f(v_h), \forall v_h \in V_h$ respectivement.

1. Rappeler les hypothèses nécessaires pour obtenir le lemme de de Cea et le redémontrer.
2. On suppose de plus a symétrique. Expliquer pourquoi la solution de Galerkin est la projection, pour un produit scalaire qu'on précisera, de la solution u du problème variationnel sur l'espace de Galerkin V_h.
3. En déduire que u_h est la solution d'un problème de minimisation.
4. En déduire une estimation meilleure que celle de Cea.

Exercice 3. Un problème de contrôle optimal.
On s'intéresse au problème :

$$c^\star = \text{argmin}_{c \in L^2(0,T)} J(c),$$

avec

$$J(c) = \frac{1}{2}|y(T) - y_{cible}|^2 + \frac{\alpha}{2}\int_0^T c(t)^2 dt,$$

où α est un réel strictement positif, la fonction y (l'état) est contrôlée par la fonction c sur $[0,T]$ selon l'équation :

$$\dot{y}(t) = \arctan(y(t)) + c(t).$$

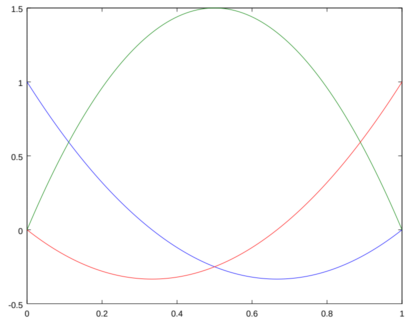

FIGURE 1 – Représentation graphique de $\psi_0,\ \psi_1,\ \psi_2$.

1. Écrire le système d'optimalité associé au problème.
2. **Etude théorique.** Dans cette partie, on prouve l'existence d'une solution. On considère une suite minimisante $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Montrer que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   (b) En déduire qu'à extraction près, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers un contrôle $c^\star$. On continue de noter $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite extraite.
   (c) On note y_n la fonction associée au contrôle c_n. Montrer que $(\dot{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(0,T)$.
   (d) En déduire que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(0,T)$.
   (e) En déduire qu'à extraction près, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement dans $H^1(0,T)$. On continue de noter $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite extraite et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des contrôles associés.
   (f) Montrer que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $C^0(0,T)$. Pour ce faire on rappelle le résultat suivant :
   L'injection de $H^1(0,T)$ dans $C^0(0,T)$ est compacte.
   (g) En déduire l'existence d'un contrôle optimal satisfaisant le système d'optimalité.
3. **Calcul pratique.**
   (a) Expliquer précisément comment calculer le gradient de la fonctionnelle J.
   (b) Expliquer précisément comment appliquer une méthode de Newton.

Exercice 4. Méthodes de Galerkin.

On considère le problème variationnel linéaire : trouver $u \in H_0^1(0,1)$ tel que

$$a(u,v) = \ell(v),\ \ \forall v \in H^1(0,1)$$

avec

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \left(\int_0^1 u(x)dx\right)\left(\int_0^1 v(x)dx\right) \\ \ell(v) &= \int_0^1 f(x)v(x)dx, \end{aligned}$$

où $f \in L^2(0,1)$.

1. On montre tout d'abord que a est coercive. Pour se faire on rappelle le résultat suivant : *De toute suite bornée dans $H^1(0,1)$, on peut extraire une sous-suite fortement convergente dans L^2.*
   En raisonnant par l'absurde, prouver que a est coercive.
2. On suppose la solution régulière.
   (a) Quelle est l'équation vérifiée par u ?
   (b) Quelles sont les conditions aux bords associées ?
   (c) Que peut-on dire de la moyenne de u ?
3. On souhaite appliquer une méthode de Galerkin. On note $(\varphi_j)_{j=1,\cdots,N}$ la base de Galerkin associée. Donner une expression explicit des coefficients du système linéaire associé.
4. Quel est l'inconvénient des éléments finis P_1 pour ce problème ?
5. On pose :

$$\psi_0(x) = 3x^2 - 4x + 1, \ \psi_1(x) = 6x(1-x), \quad \psi_2(x) = 3x^2 - 2x.$$

   Les fonctions sont représentées sur la figure 1.
   Ces polynômes vérifient : $\int_0^1 \psi_0 = \int_0^1 \psi_2 = 0$, $\int_0^1 \psi_1 = 1$. Soit une grille $(x_j)_{j=0,\cdots,N}$ de $[0,1]$, avec $x_0 = 0$, $x_j = j/N$, $x_N = 1$. On considère la base $(\varphi_j^0)_{j=1,\cdots,N} \cup (\varphi_j^1)_{j=1,\cdots,N}$, où $\varphi_j^1(x) = \psi^1(\frac{x_j - x}{x_j - x_{j+1}})$ sur l'intervalle $[x_j, x_{j+1}]$ et $\varphi_j^1(x) = 0$ ailleurs, avec $j = 0, \cdots, N-1$ et les fonctions φ_j^0 sont définies par $\varphi_j^0(x) = \psi^0(\frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j})$ sur $[x_j, x_{j+1}]$, $\varphi_j^0(x) = \psi^2(\frac{x - x_{j+1}}{x_{j+2} - x_{j+1}})$ sur $[x_{j+1}, x_{j+2}]$, $j = 0, \cdots, N-2$ et $\varphi_j^0(x) = 0$ ailleurs. Quel est l'intérêt de cette base ?