
Examen final - Analyse fonctionnelle approfondie

On justifiera **CHAQUE** *réponse.*

Exercice 1.
Les trois questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit E un espace de Hilbert, tel que pour tout $x_n \rightharpoonup x$, $\|x_n - x\| \to 0$. Que peut-on conclure sur E ?
2. Soient E et F des Banach et A un fermé de E. Si $f : A \to F$ est compacte et si X est un fermé borné dans A alors $(Id - f)(X)$ est fermé.
3. Soit $f_n : [0;1] \to C$ une fonction continue. On suppose que la famille $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ est équicontinue. Soit (x_n) une suite de $[0;1]$ telle que $x_n \to a$ et on suppose que $f_n(a) \to b$. Montrer que $f_n(x_n) \to b$.

Exercice 2.
Soit $K \in C^0([0,1]^2)$, c'est-à-dire une fonction continue de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in C^0([0,1])$, on pose $Tf(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$.

1. Soit $M > 0$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions continues sur $[0,1]$, telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n\|_\infty \leqslant M$.
   (a) Montrer que la famille $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue.
   (b) Montrer que la famille $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite convergente.
2. Soit le sous espace $E_\lambda = \{f \in C^0([0,1]), f = \lambda Tf\}$. Montrer que la boule unité de E_λ est compacte dans $C^0([0,1])$. Que peut-on en déduire ?
3. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$, n éléments de E_λ. On suppose qu'ils forment une famille libre orthonormée pour le produit scalaire $L^2(0,1) : (u,v) \mapsto \int_0^1 u(t)v(t)dt$.
   (a) Soit $x \in [0,1]$ et $k_x : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $k_x(y) = K(x,y)$. Calculer la norme de $L^2(0,1)$ en fonction de K.
   (b) On note φ_x la projection orthogonale de k_x sur $Vect(e_1, \cdots, e_n)$. Pour fixer les notations, on note $\varphi_x(y) = \sum_{\ell=1}^n \alpha_x^\ell e_\ell(y)$. Donner une expression du coefficient α_x^ℓ en fonction de K et e_ℓ.
   (c) Montrer que $e_\ell(x) = \lambda \alpha_x^\ell$
   (d) Expliquer pourquoi $\|k_x\|^2_{L^2(0,1)} \geqslant |\varphi_x\|^2_{L^2(0,1)}$ et en déduire l'inégalité :
   $$\sum_{\ell=1}^n e_\ell(x)^2 \leqslant \lambda^2 \int_0^1 K^2(x,y)dy.$$
   (e) En déduire une majoration de la dimension de E_λ qui ne dépende que de λ et de la norme K dans $L^2([0,1]^2)$.

Exercice 3.
On considère le problème de minimisation associé à la fonctionnelle :

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(t))^2 dt + \int_0^1 \cos(u(t))dt.$$

1. Montrer que J est bornée inférieurement sur $H_0^1(0,1)$. On note $m = \inf_{u \in H_0^1(0,1)} J(u)$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minimisante, c'est-à-dire telle que $\lim_n J(u_n) \to m$. Montrer que la suite (des dérivées) $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(0,1)$. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue.
3. Montrer que l'on peut extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une fonction h une pour la norme uniforme.
4. Montrer que l'on peut extraire de $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(u_{\varphi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite des dérivées $(u'_{\varphi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers une fonction k dans $L^2(0,1)$.
5. Montrer que h est dans $H_0^1(0,1)$ et que k est sa dérivée faible. (Indication : on pourra, pour $t \in [0,1]$, considérer la suite $(\langle u'_{\varphi(\psi(n))}, 1_{[0,t]}\rangle_{L^2(0,1)})_{\in\mathbb{N}}$, où $1_{[0,t]}$ est la fonction indicatrice de $[0,t]$)
6. Montrer que h minimise J sur $H_0^1(0,1)$.
7. Soit v une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ telle que $v(0) = v(1) = 0$. Montrer que
$$\int_0^1 h'(t)v'(t) - \sin(h(t))v(t)dt = 0.$$
8. On suppose que h est de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que h vérifie :
$$h'' + \sin(h) = 0,\ \ h(0) = h(1) = 0.$$