Université Paris-Dauphine Année 2012-2013
UFR MIDO-M1

Examen partiel - Analyse fonctionnelle approfondie

On justifiera **CHAQUE** *réponse.*

Exercice 1.

1. Soit $E \subset \mathbb{R}$ dénombrable et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout n et tout x de E, $|f_n(x)| \leqslant 1$. Montrer qu'il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers une fonction $f : E \to \mathbb{R}$.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthogonale d'un espace de Hilbert H de norme notée $\|\cdot\|$. Montrer l'équivalence :

$$\textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2 \text{ converge.}$$

3. Soit F une partie équi-continue de $\mathcal{C}(K, E)$, où K est un espace compact et E un e.v.n. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de F. Montrer l'équivalence :

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } f \Leftrightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f.$$

4. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace de Hilbert H. Soit K, une partie compacte de H et $x \in H$. On suppose :
   – $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in K$,
   – $x_n \rightharpoonup x$.
   Montrer que $x_n \to x$.
5. Soit H un espace de Hilbert. On suppose que pour toute suite $(x_n)_{n\in H}$

$$x_n - x \rightharpoonup 0 \Rightarrow x_n - x \to 0.$$

   Montrer que H est de dimension finie.

Exercice 2.
On considère une famille $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 g_n^2(x)dx \leqslant 1$$

On considère les fonctions $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1],\ f_n(x) = \int_0^x g_n(t)dt$$

1. Montrer qu'on peut extraire de la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.
2. Montrer, en construisant un contre-exemple, que le résultat précédent n'est pas valable pour la famille $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3.

On considère un espace de Hilbert séparable H possédant une base hilbertienne notée $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

1. Vérifier que la suite $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels bornés. On note
$$u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} a_i e_i.$$
   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers 0.
3. Montrer que $(\sqrt{n}u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0.