Université Paris-Dauphine Année 2012-2013
UFR MIDO-M1

CORRECTION : Examen partiel - Analyse fonctionnelle approfondie

On justifiera **CHAQUE** *réponse.*

Exercice 1.

1. Soit $E \subset \mathbb{R}$ dénombrable et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout n et tout x de E, $|f_n(x)| \leqslant 1$. Montrer qu'il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers une fonction $f : E \to \mathbb{R}$.

   Correction. *La solution consiste à appliquer le procédé diagonal de Cantor. On représente les éléments de E sous la forme $\{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$. Comme $(|f_n(x_1)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$, on peut en extraire une sous-suite convergente $(|f_{\varphi_1(n)}(x_1)|)_{n\in\mathbb{N}}$. On raisonne de même sur la suite $(|f_{\varphi_1(n)}(x_2)|)_{n\in\mathbb{N}}$, et on obtient une suite convergente $(|f_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}(x_2)|)_{n\in\mathbb{N}}$. En définissant $\psi : n \mapsto \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$, on obtient une suite de fonctions $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout point de E.*

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthogonale d'un espace de Hilbert H de norme notée $\|\cdot\|$. Montrer l'équivalence :

$$\textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2 \text{ converge.}$$

   Correction. *On pose $S_N = \sum_{n=1}^N x_n$ et $s_N = \sum_{n=1}^N \|x_n\|^2$. Pour $N' > N$, on alors $\|S_{N'} - S_N\|^2 = \sum_{n=N'+1}^N \|x_n\|^2 = |s_{N'} - s_N|$. On voit donc que l'on a*

$$((S_N)_{N\in\mathbb{N}} \text{ de Cauchy}) \Leftrightarrow ((s_N)_{N\in\mathbb{N}} \text{ de Cauchy})\,.$$

   On conclut par le fait que H est un espace de Hilbert, donc complet.

3. Soit F une partie équi-continue de $\mathcal{C}(K, E)$, où K est un espace compact et E un e.v.n. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de F. Montrer l'équivalence :

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } f \Leftrightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f.$$

   Correction. *L'implication de droite à gauche est facile. Prouvons l'implication inverse. Il est facile de montrer par passage à la limite que la limite simple f vérifie également la propriété d'équi-continuité de la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a donc, pour $\varepsilon > 0$, l'existence d'un $\eta > 0$ tel que*

$$\forall g \in \{(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\} \cup \{f\},\ \|x' - x\|_K \leqslant \eta \Rightarrow \|g(x') - g(x)\|_E \leqslant \varepsilon/3.$$

   Par compacité, on recouvre alors K par des boules de rayon η : $K \in \cup_{i=1,\cdots,N} B(x_i, \eta)$. Soit $x \in K$, x_i le centre de la boule à laquelle il appartient. On a alors :

$$\|f_n(x) - f(x)\|_E \leqslant \|f_n(x) - f_n(x_i)\|_E + \|f_n(x_i) - f(x_i)\|_E + \|f(x_i) - f(x)\|_E.$$

Le premier et le dernier terme du membre de droite sont majorés par $\varepsilon/3$ d'après la définition d'η et l'équi-continuité. Le deuxième terme peut être rendu inférieur à $\varepsilon/3$ par convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace de Hilbert H. Soit K, une partie compacte de H et $x \in H$. On suppose :
   – $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in K$,
   – $x_n \rightharpoonup x$.
   Montrer que $x_n \to x$.

   <u>*Correction.*</u> *Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à un compact, elle contient une sous-suite (fortement) convergente $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. On note y la limite correspondante. Mais puisque la sous-suite converge fortement vers y, elle converge également faiblement vers y. Par unicité de la limite faible, on a $x = y$. La seule limite forte possible est donc x. Or, on sait que les suites de compact n'ayant qu'une valeur d'adhérence convergent vers cette valeur. On réutilise donc la compacité de K pour conclure que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.*

5. Soit H un espace de Hilbert. On suppose que pour toute suite $(x_n)_{n\in H}$

$$x_n - x \rightharpoonup 0 \Rightarrow x_n - x \to 0.$$

   Montrer que H est de dimension finie.

   <u>*Correction.*</u> *Il suffit de montrer que la boule unité de H est compacte. Considérons une suite dans cette boule. Puisqu'on est dans un espace de Hilbert, on peut extraire de cette suite une sous-suite faiblement convergente. D'après pour l'hypothèse de l'énoncé, cette sous-suite converge. Donc la boule unité de H est compacte. D'après le théroème de Riesz, l'espace est de dimension finie.*

Exercice 2.
On considère une famille $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 g_n^2(x)dx \leqslant 1$$

On considère les fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \int_0^x g_n(t)dt$$

1. Montrer qu'on peut extraire de la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

   <u>*Correction.*</u> *On souhaite appliquer le théorème d'Ascoli à l'adhérence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est, par définition, une partie fermée de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Cette partie est bornée puisque, en appliquant Cauchy-Schwartz, on obtient*

$$|f_n(x)| = |\int_0^x 1 \times g_n(t)dt| \leqslant |\int_0^x 1^2 dt|^{1/2} |\int_0^x g_n(t)^2 dt|^{1/2} \leqslant 1.$$

De plus, $[0,1]$ est compact. Il reste donc à prouver que $\overline{(f_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ est équi-continue. Soit $x \leqslant x'$. On a :

$$|f_n(x') - f_n(x)| \leqslant \sqrt{\int_x^{x'} 1^2 dt}\sqrt{\int_x^{x'} g_n^2(t)dt} \leqslant \sqrt{x'-x},$$

ce qui prouve que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-continue. Comme cette dernière inégalité reste valable par passage à la limite sur une sous-suite convergente arbitraire $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduite que $\overline{(f_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ est équi-continue. On peut donc appliquer le théorème d'Ascoli.

2. Montrer, en construisant un contre-exemple, que le résultat précédent n'est pas valable pour la famille $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   <u>*Correction.*</u> *On considère par exemple la suite de fonctions "chapeau" continues et affines sur $[0, 1/2-1/n]$, $[1/2-1/n, 1/2+1/n]$ et $[1/2+1/n, 1]$ (pour $n > 2$), telles que $g_n(0) = g_n(1/2-1/n) = g_n(1/2+1/n) = g_n(1) = 0$ et $g_n(1/2) = n$. Tout sous-suite de cette ne converge même pas simplement.*

Exercice 3.

On considère un espace de Hilbert séparable H possédant une base hilbertienne notée $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

1. Vérifier que la suite $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0.

   <u>*Correction.*</u> *Soit $x \in H$. Puisque $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne, on a la décomposition*

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

   On a donc nécessairement $\langle x, e_i\rangle \to 0$.

2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels bornés. On note

$$u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} a_i e_i.$$

   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers 0.

   <u>*Correction.*</u> *On calcule la norme de u_n en utilisant le fait que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée. On obtient :*

$$\|u_n\|^2 = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{i=0}^{n} a_i^2.$$

   En notant M la borne des a_i, on a la majoration :

$$\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{i=0}^{n} a_i^2 \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{i=0}^{n} M^2 = \frac{M^2}{n+1},$$

   ce qui prouve le résultat.

3. Montrer que $(\sqrt{n}u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0.

<u>*Correction.*</u> *Rappelons un lemme du cours :*
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée et A une partie totale. Alors

$$(\forall y \in A,\ \langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle) \Rightarrow\ x_n \rightharpoonup x.$$

Dans notre cas, on choisit pour A la base hilbertienne $(\mathrm{e}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et on pose $x_n = \sqrt{n}u_n$. On a alors, d'après la question précédente :

$$\|x_n\| = \sqrt{n}\|u_n\| \leqslant \sqrt{\frac{n}{n+1}}M \leqslant M,$$

et

$$\forall i \in \mathbb{N}, |\langle x_n, e_i\rangle| = \frac{\sqrt{n}}{n+1}|a_i| \to 0.$$

Le lemme permet de conclure.