Université Paris-Dauphine Année 2013-2014
UFR MIDO-M1

Examen Partiel - Analyse fonctionnelle approfondie

On justifiera **CHAQUE** *réponse.*

Exercice 1.
Les exercices de cette partie sont indépendants, mais chacun d'entre eux, H désigne un espace de Hilbert, dont la norme est notée simplement $\|.\|$.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant un ensemble compact K de H. On suppose que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthogonale dans H. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   - $(\sum_{k=0}^{n} x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans H, (i)
   - $(\sum_{k=0}^{n} x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement dans H, (ii)
   - $\sum_{n\geqslant 0} \|x_n\|^2$ converge. (iii)
3. On suppose que H est de dimension infinie dénombrable. Montrer que l'adhérence faible de la sphère unité est la boule unité fermée de H. On rappelle que tout espace hilbertien admet une base hilbertienne.

Exercice 2.
Soit H un espace de Hilbert dont on note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire. On considère E et F deux sous-espaces fermés de H et on suppose que pour tout $(x,y)\in E\times F$, $\langle x,y\rangle = 0$. On souhaite prouver que $E+F$ est fermé.

1. Soit $x\in \overline{E+F}$ et une suite $x_n = e_n + f_n$ de $E+F$ (avec $e_n\in E$ et $f_n \in F$) qui converge vers x. Prouver que les suites e_n et f_n sont bornées.
2. En déduire qu'on peut extraire de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites faiblement convergentes (on citera précisement le résultat qu'on utilise).
3. Montrer que les limites faibles de ces deux suites appartiennent à E et F respectivement.
4. En déduire que $E+F$ est fermé.
5. Trouver deux parties fermées de $\mathbb{R}$, dont la somme n'est pas fermée.

Exercice 3.
Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$. On rappelle que E est un espace de Banach pour la norme $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|, t\in[0,1]\}$. On considère un sous-espace vectoriel fermé (pour la norme $\|.\|_\infty$) de E, noté F tel que
– (i) $F\subset C^1([0,1],\mathbb{R})$,
– (ii) il existe une constante $C>0$ telle que

$$\forall f\in F, \|f'\|_\infty \leqslant C\|f\|_\infty.$$

1. (a) Montrer que la boule unité de F pour la norme $\|.\|_\infty$ est compacte pour cette norme.
   (b) Que peut-on en déduire pour la dimension de F ?
2. Soit F un sous-espace de dimension finie de $C^1([0,1],\mathbb{R})$. Montrer réciproquement que la condition (ii) est vérifiée.