Université Paris-Dauphine Année 2013-2014
UFR MIDO-M1

Examen Partiel - Analyse fonctionnelle approfondie

On justifiera **CHAQUE** *réponse.*

Exercice 1.
Les exercices de cette partie sont indépendants, mais chacun d'entre eux, H désigne un espace de Hilbert, dont la norme est notée simplement $\|.\|$.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant un ensemble compact K de H. On suppose que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement.

   Correction. *Soit x la limite faible de la suite. La suite appartenant à un compact, on peut en extraire une sous-suite convergente fortement. Cette convergence étant aussi faible, on conclut, par unicité de la limite faible que la sous-suite converge vers x. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'ayant qu'une valeur d'adhérence et étant dans un compact, elle converge nécessairement vers x.*

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthogonale dans H. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   – $(\sum_{k=0}^{n} x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans H, (i)
   – $(\sum_{k=0}^{n} x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement dans H, (ii)
   – $\sum_{n\geqslant 0} \|x_n\|^2$ converge. (iii)

   Correction. *L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est facile, puisque la convergence forte implique la convergence faible. L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) du fait qu'une suite faiblement convergente est bornée. Enfin l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) vient d'un transfert de la propriété de Cauchy entre les sommes partielles des normes de (iii) et la suite du (i).*

3. On suppose que H est de dimension infinie dénombrable. Montrer que l'adhérence faible de la sphère unité est la boule unité fermée de H. On rappelle que tout espace hilbertien admet une base hilbertienne.

   Correction. *Soit x un point de la boule unité. Il suffit d'exhiber une suite de point de la sphère convergent faiblement vers x. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de l'orthogonal de $\{x\}$ dans H. On considère :*

$$x_n = x + \frac{\sqrt{1-\|x\|^2}}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} e_k.$$

   On vérifie alors que $\|x_n\| = 1$ et que $\langle x_n, e_k\rangle \to \langle x, e_k\rangle$ pour tout k. On conclut par le lemme du cours sur le critère de convergence faible pour les suites bornée.

Exercice 2.
Soit H un espace de Hilbert dont on note $\langle .,.\rangle$ le produit scalaire. On considère E et F deux sous-espaces fermés de H et on suppose que pour tout $(x, y) \in E \times F$, $\langle x, y\rangle = 0$. On souhaite prouver que $E + F$ est fermé.

1. Soit $x \in \overline{E+F}$ et une suite $x_n = e_n + f_n$ de $E+F$ (avec $e_n \in E$ et $f_n \in F$) qui converge vers x. Prouver que les suites e_n et f_n sont bornées.

   <u>Correction.</u> *Par orthogonalité, les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient*

   $$\|x_n\|^2 = \|e_n\|^2 + \|f_n\|^2.$$

   De plus, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Elle est donc bornée. On en déduit le résultat.

2. En déduire qu'on peut extraire de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites faiblement convergentes (on citera précisement le résultat qu'on utilise).

   <u>Correction.</u> *Les suites $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornées, le théorème fondamental sur la convergence faible permet d'extraire de ces deux suites deux sous-suites $(e_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes (on peut faire l'extraction de l'une après l'autre, de sorte qu'on n'a finalement qu'une exraction pour les deux).*

3. Montrer que les limites faibles de ces deux suites appartiennent à E et F respectivement.

   <u>Correction.</u> *Les sous-espaces E et F étant fermés (forts) et convexes, ils sont fermés faibles. Les limites faibles restent donc dans ces sous-espaces.*

4. En déduire que $E+F$ est fermé.

   <u>Correction.</u> *D'après la question précédente, $(e_{\varphi(n)} + f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement, disons vers $e+f$. Par unicité de la limite faible, on a $x = e+f$ et donc $x \in E+F$, d'où le résultat.*

5. Trouver deux parties fermées de $\mathbb{R}$, dont la somme n'est pas fermée.

   <u>Correction.</u> *On considère par exemple $A = \cup_{n\geqslant 2}[n+1/n, n+1/2]$ et $B = -\mathbb{N}^\star$. On montre facilement que 0 appartient à l'adhérence de $A+B$.*

Exercice 3.
Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$. On rappelle que E est un espace de Banach pour la norme $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|, t \in [0,1]\}$. On considère un sous-espace vectoriel fermé (pour la norme $\|.\|_\infty$) de E, noté F tel que
– (i) $F \subset C^1([0,1],\mathbb{R})$,
– (ii) il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall f \in F, \|f'\|_\infty \leqslant C\|f\|_\infty.$$

1. (a) Montrer que la boule unité de F pour la norme $\|.\|_\infty$ est compacte pour cette norme.

   <u>Correction.</u> *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de la boule unité de F. On a donc, pour tout n, $\|f_n'\|_\infty \leqslant C\|f_n\|_\infty = C$. On en déduit que les fonctions f_n sont toutes lipschitziennes, avec le même coefficient. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc équi-continue, bornée. Comme*

$[0,1]$ *est compact, les hypothèses du théorème d'Ascoli sont vérifiées. On en déduit donc la compacité de la suite, et donc de la boule unité de* F.

(b) Que peut-on en déduire pour la dimension de F ?

<u>Correction.</u> *La boule unité de* F *étant compacte, d'après le théorème de Riesz,* F *est de dimension finie.*

2. Soit F un sous-espace de dimension finie de $C^1([0,1],\mathbb{R})$. Montrer réciproquement que la condition (ii) est vérifiée.

<u>Correction.</u> *Soit* $(e_i)_{i=1,\cdots,N}$ *une base de* F. *Étant en dimension finie, toute les normes sont équivalentes. En particulier la norme* $\|.\|_\infty$ *est équivalente à la norme* $\|f\|_1 = \sum_{i=1}^N |\alpha_i|$, *où les* α_i *sont définis par* $f = \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i$. *Notons alors* M *le facteur :* $\forall f \in F,\ \|f\|_1 \leqslant M\|f\|_\infty$. *Les fonctions* e_i *étant de classe* C^1, *les dérivées* e_i' *sont bornée sur la boule unité, i.e.* $\forall i =, \cdots, N, \exists C_i, \|e_i\|_\infty \leqslant C_i$. *Soit, finalement,* $f \in F$ *arbitraire, et* α_i *ses composantes dans la base* $(e_i)_{i=1,\cdots,N}$, *on a :*

$$\|f'\|_\infty \leqslant \sum_{i=1}^N |\alpha_i| \|e_i'\|_\infty \leqslant \sum_{i=1}^N |\alpha_i| C_i \leqslant \max_{i=1,\cdots,N}(C_i)\|f\|_1 \leqslant M \max_{i=1,\cdots,N}(C_i)\|f\|_\infty.$$