Université Paris-Dauphine Année 2014-2015
UFR MIDO-M1

Examen partiel - Analyse fonctionnelle approfondie

On justifiera **CHAQUE** *réponse.*

Exercice 1.

1. Montrer que dans tout espace métrique une suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence est convergente.
2. Soit F une partie équicontinue de $\mathcal{C}(X;Y)$, où X et Y sont des espaces métriques dont les distances sont notées d_X et d_Y respectivement. On suppose X compact. Montrer que F est équi-uniformément continue sur X.
3. Soit M une famille de fonctions réelles sur $[0,1]$ telles que :
   - (a) $f(0)=0$,
   - (b) $|f(s)-f(t)| \leqslant \sqrt{|s-t|}$ pour tout s,t dans $[0,1]$,
   - (c) $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

   Prouver que M contient une fonction qui maximise $\int_0^1 |f(t)|dt$.

Exercice 2.

Soit $c=(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de ℓ^2, l'ensemble des suites réelles telles que $\sum c_n^2 < +\infty$. On pose :

$$C = \left\{ x \in \ell^2 / \forall n \in \mathbb{N},\ |x_n| \leqslant |c_n| \right\}.$$

1. Montrer que C est fermé dans ℓ^2.
2. Montrer que si $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de C alors on a

$$(x^k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } \ell^2 \Leftrightarrow \text{Pour tout } n \geqslant 0, \text{ la suite } (x_n^k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } \mathbb{R}.$$

3. Montrer que la propriété précédente est fausse si la suite $c \notin \ell^2$.
4. Montrer que l'ensemble C est un compact de ℓ^2.

Exercice 3.

Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement si et seulement si pour tout p, $\langle x_n, e_p\rangle$ admet une limite réelle r_p lorsque n tend vers $+\infty$.
   INDICATION : pour le sens "$\Leftarrow$", on pourra commencer par montrer
$$\sum_{p\in\mathbb{N}} r_p^2 < +\infty.$$
2. On considère le sous-ensemble $F = \{e_m + m e_n, (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$.
   (a) Le point 0 est-il dans l'adhérence faible de F ?
   (b) Et dans l'adhérence faible de l'adhérence faible de F ?
   (c) Qu'en conclure ?