Université Paris-Dauphine Année 2014-2015
UFR MIDO-M1

Examen partiel - Analyse fonctionnelle approfondie

On justifiera **CHAQUE** *réponse.*

Exercice 1.

1. Montrer que dans tout espace métrique une suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence est convergente.
   <u>*Corrrection :*</u> *notons $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite. Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que, pour tout $p, q > N$, $d(x_p, x_q) < \varepsilon/2$. Si a est une valeur d'adhérence, alors la boule $B(a, \varepsilon/2)$ contient une infinité de termes de x, en particulier un terme x_r pour lequel $r > N$. Alors, pour tout $r' > r$,*

   $$d(a, x_{r'}) < d(x_r, x_{r'}) + d(x_r, x_{r'}) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

   ce qui prouve qu'à partir d'un certain rang, tout les termes de la suite appartiennent à $B(a, \varepsilon)$. D'où le résultat.

2. Soit F une partie équicontinue de $\mathcal{C}(X; Y)$, où X et Y sont des espaces métriques dont les distances sont notées d_X et d_Y respectivement. On suppose X compact. Montrer que F est équi-uniformément continue sur X.
   <u>*Corrrection :*</u> *on rappelle la caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité, c'est-à-dire :*

   $$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, d_X(x_n, y_n) \to 0 \Rightarrow d_Y(f(x_n), f(y_n)) \to 0.$$

   Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telles que $d_X(x_n, y_n) \to 0$. Supposons que la partie ne soit pas équi-uniformément continue sur X, alors, il existe $\varepsilon > 0$, tel que

   $$\forall n, \exists f_n, d_Y(f_n(x_n), f_n(y_n)) > \varepsilon.$$

   Quitte à effectuer deux extractions successives, on peut supposer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Puisque $d_X(x_n, y_n) \to 0$, la limite des deux suites est la même. Notons la z. On a alors :

   $$\varepsilon < d_Y(f_n(x_n), f_n(y_n)) \leqslant d_Y(f_n(x_n), f_n(z)) + d_Y(f_n(z), f_n(y_n)). \qquad (\star)$$

   Soit $\eta > 0$, le pas d'équicontinuité de F en z associé à $\varepsilon/3$. Pour n assez grand, on a $d_X(x_n, z)\eta$ et $d_X(y_n, z)\eta$. On a alors $d_Y(f_n(x_n), f_n(z)) + d_Y(f_n(z), f_n(y_n)) \leqslant 2\varepsilon/3$ ce qui contredit $(\star)$.

3. Soit M une famille de fonctions réelles sur $[0, 1]$ telles que :
   — (a) $f(0) = 0$,
   — (b) $|f(s) - f(t)| \leqslant \sqrt{|s - t|}$ pour tout s, t dans $[0, 1]$,
   — (c) $\int_0^1 f(t)dt = 0$.
   Prouver que M contient une fonction qui maximise $\int_0^1 |f(t)|dt$.
   <u>*Corrrection :*</u> *On souhaite montrer la compacité de la famille M en utilisant le théorème d'Ascoli. D'après la propriété (a), M est équicontinue. Les propriétés (a), (b) et (c) sont*

stables par passage à la limite (en norme infinie) sur f, donc M est fermée. Le fait que M est bornée provient de :

$$|f(t)| = |f(t) - f(0)| \leqslant \sqrt{t} \leqslant 1.$$

D'après le théorème d'Ascoli, M est donc compacte. Toute fonction continue sur M à valeur réelle admet une borne supérieure qui est atteinte. Or, l'application $f \mapsto \int_0^1 |f|$ est continue sur $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$.

Exercice 2.

Soit $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de ℓ^2, l'ensemble des suites réelles telles que $\sum c_n^2 < +\infty$. On pose :

$$C = \left\{x \in \ell^2 / \forall n \in \mathbb{N},\ |x_n| \leqslant |c_n|\right\}.$$

1. Montrer que C est fermé dans ℓ^2.
   Corrrection : *soit $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de C et x sa limite. On a donc $\sum_{n\geqslant 0}(x_n - x_n^k)^2 \to 0$. En particulier, chacun des termes x_n^k converge, à n fixé et lorsque k tend vers l'infini vers x_n. Par conséquent, $|x_n| \leqslant |c_n|$. La suite x est donc bien dans C.*
2. Montrer que si $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de C alors on a

   $$(x^k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } \ell^2 \Leftrightarrow \text{Pour tout } n \geqslant 0, \text{ la suite } (x_n^k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } \mathbb{R}.$$

   Corrrection : *Le sens "$\Rightarrow$" a été démontré dans la question précédente. La réciproque est une variante du théorème de convergence dominée. On peut la montrer comme suit. Soit $\varepsilon > 0$. Les éléments de la suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont dominés, en tant qu'éléments de C par la suite c. Or $c \in \ell^2$, on a donc l'existence d'un N pour lequel on a la domination uniforme :*

   $$\forall k \in \mathbb{N},\ \sum_{N\leqslant n} |x_n^k|^2 \leqslant \sum_{N\leqslant n} |c_n|^2 \leqslant \varepsilon/4.$$

   Notons $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des limites de x_n^k. Par passage à la limite sur k, l'inégalité précédente reste correcte si l'on remplace x_n^k par x_n. On a

   $$\begin{aligned} \sum_{0\leqslant n}(x_n - x_n^k)^2 &= \sum_{0\leqslant n\leqslant N-1}(x_n - x_n^k)^2 + \sum_{N\leqslant n}(x_n - x_n^k)^2 \\ &\leqslant \sum_{0\leqslant n\leqslant N-1}(x_n - x_n^k)^2 + 2\sum_{N\leqslant n}(x_n)^2 + (x_n^k)^2 \\ &\leqslant \sum_{0\leqslant n\leqslant N-1}(x_n - x_n^k)^2 + \varepsilon/2. \end{aligned}$$

   Or, en tant que somme finie de quantités tendant vers 0, $\sum_{0\leqslant n\leqslant N}(x_n - x_n^k)^2$ tend vers 0. En supposant k assez grand, on peut donc le majorer par $\varepsilon/2$, ce qui achève la preuve.
3. Montrer que la propriété précédente est fausse si la suite $c \notin \ell^2$.
   Corrrection : *Il suffit de prendre la suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par*

   $$\begin{cases} x_n^k = c_n & \text{si } n \leqslant k \\ x_n^k = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
4. Montrer que l'ensemble C est un compact de ℓ^2.
   Corrrection : *Si $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de C le procédé diagonal de Cantor permet d'obtenir une suite $(x^{\psi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ dont tout les termes convergent. D'après l'équivalence obtenue à la question précédente, cela suffit à prouver que $(x^{\psi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans C.*

Exercice 3.

Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement si et seulement si pour tout p, $\langle x_n, e_p\rangle$ admet une limite réelle r_p lorsque n tend vers $+\infty$.
INDICATION : pour le sens "$\Leftarrow$", on pourra commencer par montrer
$$\sum_{p\in\mathbb{N}} r_p^2 < +\infty.$$
<u>Corrrection :</u> *Le sens "$\Rightarrow$" est évident d'après la définition de la convergence faible, on a ainsi $r_p = \langle x, e_p\rangle$ où x est la limite faible.*
Preuve de l'indication : On a par définition d'une base hilbertienne $\|x_n\|^2 = \sum_{p\in\mathbb{N}}\langle x_n, e_p\rangle^2$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée par un certain $M > 0$, on en déduit par Cauchy-Schwarz que $\sum_{p\in\mathbb{N}}\langle x_n, e_p\rangle^2 \leqslant M^2$. En particulier, pour tout $P \in \mathbb{N}$, $\sum_{p\leqslant P}\langle x_n, e_p\rangle^2 \leqslant M^2$, grâce à laquelle on obtient, en passant à la limite $\sum_{p\leqslant P} r_p^2 \leqslant M^2$. On en déduit le résultat en faisant tendre P vers l'infini dans la dernière inégalité.
Preuve du sens "$\Leftarrow$" : on pose donc $x = \sum_{p\in\mathbb{N}} r_p e_p$, qui a bien un sens puisque $(r_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. On a alors facilement
$$\forall p \in \mathbb{N},\ \langle x_n, e_p\rangle \to \langle x, e_p\rangle,$$
et on déduit la convergence faible par le lemme du cours sur les parties totales, puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

2. On considère le sous-ensemble $F = \{e_m + me_n, (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$.
   (a) Le point 0 est-il dans l'adhérence faible de F ?
   <u>Corrrection :</u> *Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de F convergent faiblement vers 0. On écrit $x_k = e_{m_k} + m_k e_{n_k}$. D'après le cours, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée. En particulier, la suite d'entiers $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée et elle prend une infinité de fois une certaine valeur p. La suite possède donc une sous-suite de la forme $x_{\varphi(k)} = e_p + pe_{n_{\varphi(k)}}$. On voit alors que $\langle x_{\varphi(k)}, e_p\rangle = 1 + p\langle e_{n_{\varphi(k)}}, e_p\rangle > 1$ ce qui contredit la convergence faible vers 0. Donc 0 n'est pas dans l'adhérence de F.*

   (b) Et dans l'adhérence faible de l'adhérence faible de F ?
   <u>Corrrection :</u> *l'adhérence de F contient les élements $(e_p)_{p\in\mathbb{N}}$. En effet, fixons p et considérons la suite $(e_p + pe_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On sait que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite faible 0. Par linéarité de la limite faible, on voit que cette suite a pour limite faible e_p. On en déduit que 0 est bien dans l'adherence de l'adhérence.*

   (c) Qu'en conclure ?
   <u>Corrrection :</u> *l'adhérence faible de F n'est donc pas un fermé faible.*