Examen de rattrapage - Traitement numérique du signal - 2008

Les documents et calculatrices sont autorisés. La qualité de la rédaction et de la présentation entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1.(Compression sans perte)
On considère l'algorithme de compression d'Huffman binaire.

1. Pourquoi dans un code de compression sans perte optimal, les deux symboles de probabilités les plus faibles sont codées avec le même nombre de bits ?
2. On considère une source émettant cinq symboles $a_1, ..., a_5$ avec les probabilités suivantes :

Symbole	*Proba.*
a_1	$0,2$
a_2	$0,4$
a_3	$0,2$
a_4	$0,1$
a_5	$0,1$

   (a) Construire un arbre en suivant l'algorithme de Huffman, et donner un codage correspondant.
   (b) Montrer, par un exemple, que l'on peut obtenir plusieurs arbres différents en appliquant l'algorithme.
   (c) La variance des tailles des symboles de codes obtenues avec deux arbres différents est-elle constante ? Justifier brièvement votre réponse.
   (d) A votre avis, pourquoi choisit-on préférentiellement le codage qui produit la plus petite variance ?

Exercice 2.(Correction d'erreur)
Pour détecter et corriger les erreurs produites par un canal de transmission de signaux binaires, on décide d'envoyer trois fois de suite chaque bit du message à envoyer. On appelle *stratégie de triplement* cette méthode.

1. Donner les caractéristiques d'une telle stratégie :
   (a) Comment détecter une erreur en sortie du canal ?
   (b) Est-ce un codage par bloc ?
   (c) Quelle est la taille des blocs ?
   (d) Combien détecte-t-elle d'erreur par bloc ?
   (e) Combien corrige-t-elle d'erreur par bloc ?
   (f) Quelle est la distance du code correcteur associé à cette stratégie ?
2. On suppose que le canal produit une erreur avec une probabilité p. Si on utilise la stratégie de triplement, quelle est la probabilité qu'un bit du message initial (c'est-à-dire avant codage par la stratégie de triplement) soit érroné en sortie (c'est-à-dire après décodage) de canal ?
3. Quel est l'inconvénient de cette stratégie ?

Exercice 3.(Filtres numériques)

On considère un filtre linéaire de réponse impulsionelle $h = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. On note $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ le signal à l'entrée du filtre et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ le signal en sortie.

1. Rappeler la définition de la réponse impulsionnelle.
2. Montrer que les suites x, y et h sont reliées par la relation :

$$y = h \star x,$$

   où $\star$ désigne la convolution discrète.
3. Rappeler la définition de la transformée en z d'un signal numérique $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.
4. Montrer que les transformées en z des signaux x, y et de la réponse impulsionnelle h vérifient :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$

5. On considère le filtre défini par la relation :

$$y_n = \frac{1}{2} y_{n-1} + 2x_n.$$

   (a) Calculer la réponse impulsionnelle h de ce filtre et $H(z)$, sa transformée en z.
   (b) Ce filtre est-il stable ?
   (c) Quelle est sa réponse fréquentielle ? Le filtre est-il plutôt passe-haut ou plutôt passe-bas ?
6. Donner la réponse impulsionnelle d'un filtre dont la réponse fréquentielle est donnée par la formule :

$$H(\mathrm{e}^{i\omega}) = \exp\big(\cos(\omega)\big)\mathrm{e}^{i\sin(\omega)}.$$