Université Paris-Dauphine Année 2011-2012
UFR MIDO-M2 EDP-MAD

Rattrapage - Introduction au calcul scientifique et à l'analyse - 2012/2013

On justifiera **CHAQUE** *réponse.*

Exercice 1. .
On considère le problème elliptique :

$$\Delta u + k(x)u = f,$$

où k est une fonction bornée sur $[0,1]$, f est une fonction continue sur $[0,1]$ et u est une fonction de $[0,1]$ à valeur dans $\mathbb{R}$. On complète ce problème par un des conditions de Dirichlet homogènes.

1. Écrire une formulation faible du problème en prenant comme espace de fonctions les fonctions $\mathcal{C}^1(0,1)$.
2. On souhaite résoudre ce problème par une méthode de Galerkin. Sur quel système linéaire débouche cette méthode ?
3. On suppose à partir de maintenant que $k(x) = 1$. On utilise pour résoudre le système une méthode d'éléments finis. On choisit comme élément $\mathbb{P}^1$ (les fonctions affines par morceaux sur les éléments du maillage) et on définit un maillage uniforme de l'intervalle $[0,1]$. Écrire précisément les matrices et vecteurs intervenant dans la méthode en explicitant leurs coefficients.
4. Quelles auraient été les matrices et vecteurs dans le cas de conditions de Neumann homogènes ? Dans le cas de conditions périodiques ?
5. Qu'aurait donné une méthode par différences finies ?

Exercice 2. .

On s'intéresse à la résolution numérique du problème de Cauchy pour l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0,\ t > 0,\ x \in]0,L[,$$

avec c un réel strictement positif, complétée par les conditions initiales

$$u(0,x) = \eta_0(x) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \eta_1(x),\ x \in]0,L[,$$

de données η_0 et η_1, et les conditions aux limites de Dirichlet homogènes

$$u(t,0) = u(t,L) = 0,\ t > 0.$$

Dans toute la suite, on suppose que la solution u est régulière.

1. Montrer que l'énergie définie par

$$E(t) = \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot)\right\|^2_{L^2([0,L])} + \frac{c^2}{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial x}(t,\cdot)\right\|^2_{L^2([0,L])}$$

où $\|v\|^2_{L^2([0,L])} = (v,v)_{L^2([0,L])} = \displaystyle\int_0^L (v(x))^2\,\mathrm{d}x$, est conservée au cours du temps.
Indication : multiplier l'équation par une fonction adéquate et réaliser une intégration par parties.
On considère le schéma aux différences finies suivant, sur une grille régulière de longueurs de pas Δt et $\Delta x = \frac{L}{M}$,

$$\frac{u_j^{n+1} - 2\,u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} - c^2\,\frac{u_{j+1}^n - 2\,u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0,\ j = 1,\dots,M-1,\ n \geqslant 1,$$

la prise en compte des conditions aux limites consistant à poser

$$u_0^n = u_N^n = 0, n \geqslant 0.$$

2. Déterminer l'ordre en temps et en espace de ce schéma.
3. Étudier sa stabilité par l'analyse de von Neumann.
Indication : le produit des racines de l'équation du second degré $a\,g^2 + b\,g + c = 0$ est égal à $\frac{c}{a}$.
4. Établir que la suite de l'analogue discret de l'énergie suivant

$$E^{n+1/2} = \frac{1}{2}\,\|v^{n+1/2}\|^2_{2,\Delta x} + \frac{c^2}{2}\,(w^{n+1}, w^n)_{2,\Delta x},\ n \geqslant 0,$$

où l'on a posé

$$v_j^{n+1/2} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \quad \text{et} \quad w_{j+1/2}^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x},$$

$$\|a\|^2_{2,\Delta x} = \Delta x \sum_{j=1}^{N-1} (a_j)^2 \quad \text{et} \quad (a,b)_{2,\Delta x} = \Delta x \sum_{j=0}^{N-1} a_{j+1/2} b_{j+1/2},$$

est constante.

Exercice 3. .
On considère le problème de Cauchy d'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial f(u)}{\partial x}(t,x) = 0,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

avec $f(u) = \frac{u^2}{2}$, et de condition initiale

$$u(0,x) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R},$$

où

$$u_0(x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0 \\ u_d & \text{si } x > 0 \end{cases},\ \text{avec } u_g < u_d.$$

1. Déterminer si les fonctions suivantes sont des solutions faibles du problème :

$$u(t,x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < u_g\,t \\ \dfrac{x}{t} & \text{si } u_g\,t \leqslant x \leqslant u_d\,t \\ u_d & \text{si } x > u_d\,t \end{cases} \text{ et } u(t,x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < \frac{1}{2}\,(u_d + u_g)\,t \\ u_d & \text{si } x > \frac{1}{2}\,(u_d + u_g)\,t \end{cases}.$$

2. Quelle est la solution entropique du problème ?