Université Paris-Dauphine
Département MIDO

T.P. 3 : Equations de transport

On s'intéresse dans ce TP à la résolution de l'équation de transport :

$$\partial_t u + a \partial_x u = 0$$
$$u(x, t = 0) = u_0(x),$$

où x est une variable réelle (i.e. on ne considère que le cas unidimensionnel) et a est une scalaire représentant la vitesse d'advection. On souhaite résoudre cette équation sur le domaine $x \in [0, 5]$.
La condition initiale u_0 est donnée par :

$$u_0(x) = 1, \quad 1 \leq x \leq 1.5,$$
$$u_0(x) = 0. \quad sinon.$$

1. Résoudre exactement cette équation.
2. On pose $\nu = adt/dx$. Comparer cette solution avec les solutions approchées calculée par les méthodes suivantes :
   (a) Schéma FTCS (Euler en temps, centré en espace) :
   $$u_j^{i+1} = u_j^i - \nu/2(u_{j+1}^i - u_{j-1}^i)$$
   (b) Schéma de Lax :
   $$u_j^{i+1} = (1 - \nu)/2.u_{j+1}^i + (1 + \nu)/2.u_{j-1}^i$$
   (c) Schéma Upwind :
   $$u_j^{i+1} = u_j^i - \nu.v_j^i$$
   avec
   $$v_j^i = u_{j+1}^i - u_j^i, \quad si\ \nu > 0$$
   $$v_j^i = u_j^i - u_{j-1}^i, \quad si\ \nu \leq 0.$$
   (d) Schéma Lax - Wendroff :
   $$\begin{aligned} u_j^{i+1} = \quad & u_j^i - \nu/2(u_{j+1}^i - u_{j-1}^i) \\ & + \nu^2/2(u_{j+1}^i - 2u_j^i + u_{j-1}^i) \end{aligned}$$
3. A l'aide de la commande "movie2avi" faire un petit film de l'évolution par le schéma de votre choix.