Méthodes de Monte-Carlo en Finance.
TP 3

22 novembre 2007

Exercice 1 :Réduction de variance
On souhaite réduire la variance de l'estimateur d'un call. Le modèle est le suivant : On considère l'évolution

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

où r et σ sont des réels positifs et où $W_t \sim \sqrt{t}\mathcal{N}(0,1)$. La solution de cette équation est :

$$S_t = S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma W_t}.$$

On considère également le call :

$$C_t = e^{-rt}E((S_t - K)^+),$$

où $K > 0$. On rappelle la valeur théorique du call :

$$C_t = S_0 N(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2),$$

où :

1. $N(x) = \frac{1}{sqrt(2\pi)} \int_{\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$,
2. $d_1 = \frac{ln(\frac{S_0}{K})+(r+\frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}$,
3. $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$.

On prendra comme valeurs numériques :

$$r = .05,\ K = 100,\ \sigma = 0.02,\ S_0 = 100,\ t = 1.$$

1. Trouver une valeur d'un nombre de trajectoire pour obtenir une valeur raisonnable de la valeur du call.
2. Calculer les intervalles de confiance à 95%.

Pour réduire les intervalles de confiance, on utilise la méthode des variables antitétiques.

1. Mettre en oeuvre la méthode
2. Comparer les tailles des intervalles de confiance avec et sans l'usage de la méthode des variables antitétiques.

3. Quantifier le gain apporter par la méthode.

Exercice 2 : Evaluation du Δ

On considère le grec Δ, défini par :

$$\frac{\partial c}{\partial S_0}.$$

1. Rappeler les méthodes d'évaluation numérique d'une dérivée.
2. Rappeler les méthodes d'évaluation du Δ.
3. On considère le cas décrit dans l'exercice 1. On pourra utiliser les variable
   (a) Donner une estimation de l'erreur de l'estimateur.
   (b) Retrouver numériquement la dépendance de la variance par rapport au nombre de trajectoires simulées.
   (c) Etudier la dépendance par rapport à ε (le pas de discrétisation de la dérivée) de l'estimateur.