Université Paris-Dauphine
Département MIDO M2, EDP-MAD.

T.P.3 : Algorithmes monotones

1 Problème

Le but de ce T.P. est d'implémenter un schéma monotone. On reprend l'exemple du TP précédent :

On considère un système $y(t) \in \mathbb{C}^2$ dont l'évolution est décrite par l'équation :

$$\dot{y}(t) = i\,(A + c(t)B)\,y(t),$$

où A et B sont deux matrices réelles symétriques, et c une fonction scalaire réelle. On se donne les valeurs numériques suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et $T = 10$, $\alpha = 1$, $N = 10^3$.

On suppose que le système par d'un état y_0, de norme $\|y_0\| = 1$ au temps $t = 0$ et on cherche un contrôle c qui permet d'approcher une cible y_{ref} au temps T. On a donc recours à une fonctionnelle du type :

$$J(c) = \frac{1}{2}\|y(T) - y_{cible}\|^2 + \frac{\alpha}{2}\int_0^T c(t)^2 dt,$$

qui dans notre cas se simplifie en :

$$J(c) = -Re\langle y(T), y_{cible}\rangle + \frac{\alpha}{2}\int_0^T c(t)^2 dt + 2.$$

Le '+2' ne modifiant pas le problème, on l'omet par la suite.

2 Algorithmes monotones

2.1 Principes

On rappelle qu'étant donné deux contrôles c et c', y et y les états associés, et p l'adjoint associé à c, on a :

$$\langle y'(T) - y(T), y_{cible} \rangle = -\int_0^T i(c'(t) - c(t)) \langle By'(t), p(t) \rangle dt.$$

On utilise les conventions $\langle \lambda u, v \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle$ et $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$.

2.2 Discrétisation

On se donne une discrétisation en temps $(t_n)_{n=0,\cdots,N}$, $t_n = n\Delta t$, $T = N\Delta t$. Pour l'équation d'évolution, on utilise la discrétisation suivante (dite du "splitting d'opérateur") :

$$y_{n+1} = \exp(iA\Delta t) \exp(ic_n B\Delta t) y_n.$$

Dans ce cadre, on a :

$$\langle y'_N - y_N(T), y_{cible} \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \langle (\exp(c'_j iBdt) - \exp(c_j iBdt)) y'_j, p_{j+1} \rangle. \tag{1}$$

3 Travail à faire

1. En choisissant deux contrôles arbitraires (random), vérifier numériquement la formule (1).
2. À partir de cette formule, implémenter une méthode d'optimisation. On pourra soit faire la méthode du cours

$$J(c') - J(c) = -\frac{\alpha}{\lambda} \int_0^T (c'(t) - c(t))^2 dt,$$

   soit faire plus simplement un pas de la méthode de Newton sur les fonctions de la somme, pour chaque pas de temps.
3. Comparer les résultats avec ceux obtenus par la méthode du gradient.