Université Paris-Dauphine
Département MIDO

T.P.3 : Inégalités variationnelles

1 Problème

Le but de ce T.P. est d'implémenter des schémas de résolution d'inégalités variationnelles. On s'appuiera sur la méthode vue en cours. Dans la section 2, on considère l'exemple simple d'un fil élastique suspendu au dessus d'un obstacle. Dans la section 3, on traite le cas d'une équation parabolique.

2 Exemple statique : cas d'un fil élastique

On considère un fil elastique au repos suspendu entre les deux points $(0,0)$ et $(1,0)$. Pour $x \in [0,1]$, On note $u(x)$ l'ordonnée du fil correspondant à l'abscisse x. Sous le fil se trouve un obstacle paramétré par une courbe $(x, h(x))$, avec encore $x \in [0,1]$. Dans un modèle simple d'élasticité linéaire, l'ordonnée $u(x)$ vérifie

$$\nu \Delta u - \lambda = f$$

où :

- ν est un réel positif caractérisant la raideur linéïque du fil,
- $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ est l'opérateur Laplacien,
- $\lambda > 0$ est la force de réaction du support, engendrée par la contact avec l'obstacle, aux points où ce contact à lieu, bien sûr,
- $f = -\rho g$ est la force linéïque de gravité, ρ étant la masse linéïque et g la constante de pesanteur terrestre.

En choisissant comme inconnues le couple (u, λ), le système à résoudre est donc finalement :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \nu \Delta u - \lambda & = & f, \\ \lambda & \geq & 0, \\ u & \geq & h, \\ (u-h) \times \lambda & = & 0. \end{array} \right. \qquad (\star)$$

Après discrétisation en espace et en gardant les mêmes notations $u, \ \lambda, \ f, \ h$ pour les grandeurs discrétisées (ces symboles représentent donc maintenant des vecteurs), le système ($\star$) devient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} Au-\lambda & = & f, \\ \lambda_i & \geq & 0, \\ u_i & \geq & h_i, \\ (u_i-h_i)\times\lambda_i & = & 0. \end{array}\right. \qquad (\star\star)$$

où $u_i = u(x_i)$, $\lambda_i = \lambda(x_i)$, $h_i = h(x_i)$, A est la matrice associée au laplacien. On note N le nombre de noeuds considérés lors de la discrétisation, c'est-à-dire $1 \leq i \leq N$.

1. Reformuler le problème sous forme d'un système d'égalités.
2. Implémenter la méthode vue en cours avec les données :

$$f = -10,\ h(x) = 2(x-5)-2,\ \nu = 10^{-2}.$$

3. Comparer avec la complexité observée à celle du solver de Matlab.

3 Exemple dynamique : modèle de Black-Scholes pour le pricing d'option américaine

On considère maintenant un exemple dépendant du temps. L'équation d'évolution considérée est l'équation de Black-Scholes :

$$\partial_t P - \mathcal{L}P = 0, \qquad t \in [0,T]$$

avec

$$\mathcal{L}P = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_{xx}P + rx\partial_x P - (r-q)P.$$

où P est le prix de l'option, $x \in [0,L]$ est la valeur de l'actif, σ, r, q sont, respectivement la volatilité, le taux d'intérêt, et le dividende. Les conditions aux limites considérées sont $P(0) = K,\ P(L) = 0$.

Dans le cas d'une option américaine, on considère une contrainte d'inégalité $P \geq h$, avec $h(x) = (K-x)_+$. Comme condition initiale, on pose $P(t=0,x) = h(x)$. Pour se ramener au cas de Dirichlet homogène, on pose $u = P - P_d$, où P_d est la solution de Black-Scholes sans contrainte d'inégalité. Les données numériques sont :

$$K = 100, r = 0.05, q = 0.0015, \sigma = 0.5., T = 1, L = 20.$$

1. Écrire un code pour résoudre Black-Scholes par différences finies (on pourra utliser un theta-schéma et des différences finies pour la discrétisation spatiale).
2. Écrire un code pour prendre en compte la contrainte d'inégalité.