Université Paris-Dauphine Année 2010-2011
UFR MIDO-M2 EDP-MAD

Examen de rattrapage - Introduction au calcul scientifique et à l'analyse - 2010/2011

On justifiera **CHAQUE** *réponse.*

Exercice 1.
Considérons le problème d'évolution

$$\begin{cases} \partial_t \alpha(t,x) + u(t,x)\partial_x \alpha(t,x) = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ \alpha(0,x) = \alpha^0(x) \text{ dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

où $u(t,x)$ est une fonction donnée, " suffisamment régulière " (faire les hypothèses nécessaire dans la suite), ainsi que $\alpha^0(x)$.
Trouver des courbes de $\mathbb{R}^2$ sur lesquelles la solution $\alpha(t,x)$ est constante.
Donner une expression de la solution $\alpha(t,x)$.
Résoudre explicitement les cas où $u(t,x) = u$ (constante, *vitesse d'advection* indépendante du temps) et où $u(t,x) = x$.
Exercice 2.
Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un ouvert régulier borné. Soit $f \in L^2(\Omega)$. Soit $a_0 \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ tel que $\exists \alpha > 0$ pour lequel $a_0(x) \geqslant \alpha \; \forall x \in \Omega$.
1) Montrer qu'il existe un unique $u \in H^1_0(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + a_0 uv = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H^1_0(\Omega). \tag{1}$$

2) Quel est le problème aux limites vérifié par u ?
3) On suppose maintenant être en dimension 1, et que Ω est le segment $[0,1]$. On se donne un maillage uniforme $(x_j)_{j=0,\dots,M+1}$, avec $x_0 = 0$, $x_{M+1} = 0$, $x_j = j.h$, $Mh = 1$ (ne pas hésiter à faire un dessin de la grille). Dans le cas où $\mathcal{B}$ est la base d'éléments finis P^1, c'est-à-dire que les fonctions φ_i sont affines par morceaux et vérifient

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour $j = 1, ..., M$. Calculer les coefficients de la matrice associée à la méthode de Galerkin en fonction des données du problème.
Exercice 3. On considère le schéma de Lax-Friedrichs pour l'équation d'advection à vitesse constante dans $\mathbb{R}$, $\partial_t u + a\partial_x u = 0$ avec une donnée initiale $u^0 \in \mathcal{C}^4_b(\mathbb{R})$:

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j-1}^n + u_{j+1}^n}{2} - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n),$$

$$u_j^0 = u^0(j\Delta x), \; \forall j \in \mathbb{Z}.$$

1) a) Donner $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que le schéma est consistant avec l'équation d'advection si et seulement si le rapport $\frac{\Delta x^\alpha}{\Delta t}$ tend vers 0 lorsque Δx tend vers 0.
b) Montrer que ce schéma est convergent sous cette condition et une condition habituelle.
c) Quel est l'ordre de convergence si $\Delta t = \Delta x^\beta$ pour $\beta \in]0, \alpha[$?

2) On s'intéresse maintenant au comportement de la solution discrète lorsque la condition ci-dessus n'est pas vérifiée. On suppose que $\Delta t = \lambda \Delta x^{\alpha}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
a) Montrer que le schéma est consistant avec

$$\partial_t u + a\partial_x u = \frac{1}{2\lambda}\partial^2_{x,x} u.$$

Quel est l'ordre de consistance ?(On calculera l'erreur de consistance ε_j^n.)
b) Montrer que l'erreur :

$$e_j^{n+1} = \frac{e_{j-1}^n + e_{j+1}^n}{2} - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(e_{j+1}^n - e_{j-1}^n) - \Delta t \varepsilon_j^n.$$

c) Montrer que la solution discrète converge vers la solution de

$$\partial_t u + a\partial_x u = \frac{1}{2\lambda}\partial^2_{x,x} u,$$

en admettant l'existence d'une solution (régulière) à cette équation.
Exercice 4. Calculer une solution de :

$$\partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = 0,$$

pour $\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $u(0,x) = 3$ si $x \leqslant 0$, $u(0,x) = 1$ si $0 < x \leqslant 1$, $u(0,x) = 0$ si $1 < x$.