Méthodes numériques pour les EDP.
Projet 1: contrôle d'un mouvement de masse.

Ce projet consiste à implémenter en 1D un schéma dit monotone pour le problème de transport :

$$\begin{aligned}\inf E(\rho, v) \quad &:= \quad \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}|v(t,x)|^2 \rho(t,x) \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\qquad + \int_{\mathbb{R}} V(x)\rho(1,x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

sous la contrainte :

$$\partial_t \rho - \varepsilon^2 \Delta\rho + \mathrm{div}(\rho v) = 0 \text{ on } (0,1) \times \mathbb{R}. \tag{1}$$

On prendra comme donnees celles donnees a la fin de l enonce.

1 Discrétisation

Dans cette partie, on code un algorithme de résolution de (1).

1. Coder un algorithme de résolution de :

   $$\partial_t \rho - \varepsilon^2 \Delta\rho = 0 \text{ on } (0,1) \times \mathbb{R}. \tag{2}$$

   On utilisera des conditions de Neuman homogènes. Vérifier théoriquement et numériquement que la masse est conservée au cours du temps.

2. Coder un algorithme de résolution de (1). On utilisera le schéma de Godunov pour discrétiser le terme $\mathrm{div}(\rho v)$, c'est-à-dire qu'il sera codé par un terme de la forme :

   $$\frac{\Delta t}{\Delta x}(\rho^i_{j+1/2} v^i_{j+1/2} - \rho^i_{j-1/2} v^i_{j-1/2}),$$

   dans laquelle j est l'indice d'espace et i est l'indice de temps. On a également noté :

   $$\rho^i_{j+1/2} = \left\{ \begin{array}{lll} \rho^i_{j+1} & if & v^i_{j+1/2} < 0 \\ \rho^i_j & if & v^i_{j+1/2} \geq 0. \end{array} \right.$$

   Vérifier théoriquement et numériquement que sous la condition :

   $$\forall j = 1...M-1, \ |v^i_{j+1/2}| \leq \lambda := \frac{\Delta x}{2\Delta t} - \varepsilon^2 \frac{1}{\Delta x}, \tag{3}$$

   la positivité de ρ est préservée à chaque pas de temps.

3. Montrer finalement que le schéma s'écrit sous la forme :

   $$\rho^{i+1} = \big(A + B(v^i)\big)\rho^i,$$

   où A et B sont deux matrices que l'on précisera.

2 Optimisation

Dans cette deuxième partie, on construit un schéma d'optimisation monotone. Pour ce faire, on introduit :

$$\begin{aligned}\phi^N &= V,\\ \phi^i &= \big(A^* + B^*(v^i)\big)\phi^{i+1} + \frac{\Delta t}{2} q(v^i).\end{aligned}$$

où :

$$q_j(v^i) = \frac{(v^i_{j-1/2})^2 + (v^i_{j+1/2})^2}{2}.$$

De plus, on considère la version discrétisée de la fonctionnelle E suivante :

$$\begin{aligned}E_{\Delta t,\Delta x}(v) : &= \Delta t.\Delta x \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} \frac{1}{2} q_j(v^i)\rho^i_j\\ &\quad + \Delta x \sum_{j=1}^{M-1} V_j \rho^N_j\\ &= \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2}\langle \rho^i, q(v^i)\rangle + \langle \rho^N, V\rangle\end{aligned}$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire sur $\mathbb{R}^{M-1}$ défini par (M est le nombre de pas d'espace) :

$$\langle u, v\rangle = \Delta x \sum_{j=1}^{M-1} u_j v_j.$$

1. Etant donnés deux champs de vitesses v et v', vérifier que l'on a :

$$\begin{aligned}E_{\Delta t,\Delta x}(v') - E_{\Delta t,\Delta x}(v) &= \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \langle \rho'^i, q(v'^i) - q(v^i)\rangle\\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \langle \rho'^i - \rho^i, q(v^i)\rangle\\ &\quad + \sum_{i=0}^{N-1} \langle \rho'^{i+1} - \rho^{i+1}, \phi^{i+1}\rangle - \langle \rho'^i - \rho^i, \phi^i\rangle\\ &= \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \langle \rho'^i, q(v'^i) - q(v^i)\rangle\\ &\quad + \sum_{i=0}^{N-1} \langle \big(B(v'^i) - B(v^i)\big)\rho'^i, \phi^{i+1}\rangle.\end{aligned}$$

que l'on peut encore écrire sous la forme :

$$E_{\Delta t,\Delta x}(v') - E_{\Delta t,\Delta x}(v) = \Delta t.\Delta x \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-2} \Delta^i_j(v', v),$$

où l'on a noté :

$$\begin{aligned}\Delta^i_j(v', v) = \frac{\rho'^i_j + \rho'^i_{j+1}}{2}\Big(\frac{(v'^i_{j+1/2})^2 - (v^i_{j+1/2})^2}{2}\Big)\\ + \Big(\rho'^i_{j+1/2} v'^i_{j+1/2} - \widetilde{\rho'}^i_{j+1/2} v^i_{j+1/2}\Big)\Big(\frac{\phi^{i+1}_{j+1} - \phi^{i+1}_j}{\Delta x}\Big).\end{aligned} \tag{4}$$

dans cette dernière équation, on a noté :

$$\widetilde{\rho'}^{i}_{j+1/2} = \begin{cases} \rho'^{i}_{j+1} & if \quad v^{i}_{j+1/2} < 0 \\ \rho'^{i}_{j} & if \quad v^{i}_{j+1/2} \geq 0. \end{cases}$$

2. On souhaite que v' soit plus "efficace" que v du point de vue de la fonctionnelle $E_{\Delta t,\Delta x}$. Pour se faire, on définit à chaque temps et en chaque point d'espace v' comme étant la solution de :

$$\Delta^{i}_{j}(v',v) = -\theta \frac{\rho'^{i}_{j} + \rho'^{i}_{j+1}}{2}(v'^{i}_{j+1/2} - v^{i}_{j+1/2})^2. \tag{5}$$

   (a) Montrer que cette solution conduit nécessairement à un décroissement de la fonctionnelle $E_{\Delta t,\Delta x}$, c'est-à-dire $E_{\Delta t,\Delta x}(v') \leq E_{\Delta t,\Delta x}(v)$.

   (b) Montrer que (5) admet au moins une solution.

   (c) Montrer que :

$$v'^{i}_{j+1/2} = \begin{cases} \alpha^{i}_{j+1/2} & if \quad v^{i}_{j+1/2}.\alpha^{i}_{j+1/2} \geq 0 \\ \beta^{i}_{j+1/2} & if \quad v^{i}_{j+1/2}.\alpha^{i}_{j+1/2} < 0. \end{cases} \tag{6}$$

   est une solution lorsque l'on pose :

$$\alpha^{i}_{j+1/2} = (1-\delta)v^{i}_{j+1/2} + \delta \nu^{i}_{j+1/2}\frac{\phi^{i+1}_{j+1} - \phi^{i+1}_{j}}{\Delta x},$$

$$\beta^{i}_{j+1/2} =$$

$$\frac{-b^{i}_{j+1/2} - \operatorname{sign}(v^{i}_{j+1/2})\sqrt{(b^{i}_{j+1/2})^2 - 4a^{i}_{j+1/2}.c^{i}_{j+1/2}}}{2a^{i}_{j+1/2}},$$

   avec :

$$\delta = \frac{2}{2\theta+1},$$

$$\nu^{i}_{j+1/2} = \frac{2\widehat{\rho}'^{i}_{j+1/2}}{\rho'^{i}_{j} + \rho'^{i}_{j+1}},$$

   et

$$\widetilde{\nu}^{i}_{j+1/2} = \frac{2\widetilde{\rho'}^{i}_{j+1/2}}{\rho'^{i}_{j} + \rho'^{i}_{j+1}},$$

   avec :

$$\widehat{\rho}'^{i}_{j+1/2} = \begin{cases} \rho'^{i}_{j+1} & if \quad \widetilde{\rho}'^{i}_{j+1/2} = \rho'^{i}_{j} \\ \rho'^{i}_{j} & if \quad \widetilde{\rho}'^{i}_{j+1/2} = \rho'^{i}_{j+1} \end{cases}.$$

   Et :

$$a^{i}_{j+1/2} = 1+\theta,$$

$$b^{i}_{j+1/2} = -2(\theta v^{i}_{j+1/2} + \nu^{i}_{j+1/2}\frac{\phi^{i+1}_{j+1} - \phi^{i+1}_{j}}{\Delta x}),$$

$$c^{i}_{j+1/2} = (\theta-1)(v^{i}_{j+1/2})^2 + 2v^{i}_{j+1/2}\widetilde{\nu}^{i}_{j+1/2}\frac{\phi^{i+1}_{j+1} - \phi^{i+1}_{j}}{\Delta x}.$$

3. Coder l'algorithme monotone que l'on peut déduire des questions précédentes. On effectura le test avec les conditions :

```
%Discretisation
L                             = 1 ;
T                             = 1 ;
N                             = 1000 ;
M                             = 50 ;
t                             = linspace(0,T,N) ;
x                             = linspace(0,L,M+1) ;
dt                            = t(2)-t(1) ;
dx                            = x(2)-x(1) ;
%Parametres modele
eps                           = 0.01;
cfl                           = dx/(2*dt)-eps/dx;
factg                         = 10e1 ;
rho_ini                       = [exp(-factg*(x-.5).^2)]' ;
rho_ini                       = rho_ini(2:M) ;
rho_ini                       = rho_ini/(dx*sum(rho_ini)) ;
V                             = [exp(-factg*(x-.2).^2)]'+[exp(-factg*(x-.8).^2)]' ;
V                             = V(2:M) ;
V                             = .1*(max(V)-V)/(dx*sum(max(V)-V)) ;
```