

Université Paris-Dauphine PSL
Année 2025-2026

ANALYSE 4

Polycopié de Daniela Tonon,
version modifiée par Olivier Glass,
...et adaptée par François Simenhaus

François Simenhaus
simenhaus@ceremade.dauphine.fr

Bureau F424

Code equipe Teams : lociby2

$N = 0,4CC + 0,6E$ avec $0,4CC = 0,1cc + 0,3P$

Table des matières

1	Rappels sur les espaces métriques	3
1.1	Définition et exemples	3
1.2	Boules ouvertes, boules fermées, sphères	5
1.3	Voisinages, points intérieurs et points adhérents	6
1.4	Parties ouvertes, parties fermées	8
1.5	Intérieur et adhérence d'une partie	9
1.6	Parties bornées et diamètre d'une partie	11
1.7	Suites	12
1.7.1	Convergence, unicité de la limite, etc.	12
1.7.2	Caractérisation séquentielle d'une partie ouverte, fermée ou dense	13
	Vous vous êtes arrêté.e.s ici en Analyse 3 : on résume !	13
1.7.3	Suites extraites, valeurs d'adhérence.	15
1.8	Applications continues	17
1.9	Topologie induite	22
1.10	Espaces vectoriels normés (rappels et nouveautés)	24
1.10.1	Définition et exemples	24
1.10.2	Espaces préhilbertien et espaces euclidiens	27
1.10.3	Equivalence des normes en dimension finie	28
2	Compacité	30
2.1	Compacité au sens de Bolzano-Weierstrass	30
2.2	Compacité et continuité.	31
2.3	Compacité dans un espace normé	32
3	Connexité	35
3.1	Définition et premières propriétés	35
3.2	Connexité par arcs	37
3.3	Composantes connexes	39
4	Complétude	41
4.1	Définition et généralités	41
4.2	Espaces de Banach.	43
5	Applications linéaires continues	45
5.1	Caractérisation de la continuité pour une application linéaire	45
5.2	Espace vectoriel normé des fonctions linéaires continues	46
5.3	Applications bilinéaires	48

1 Rappels sur les espaces métriques

Dans cette partie nous proposons des rappels sur la topologie des espaces métriques que vous avez étudiée dans le cours Analyse 3 (S3). Il est indispensable de très bien maîtriser ces notions qui vous serviront bien sûr pour la suite du cours mais plus largement pour toutes vos études de mathématiques. Elles sont en effet centrales et indispensables pour de nombreux thèmes que vous aborderez cette année et les suivantes.

Le début du chapitre est organisé comme une collection des définitions et résultats principaux. De nombreuses démonstrations ont été omises : nous en verrons certaines au tableau en cours mais elles sont surtout proposées comme exercices dans la première feuille de TD. Il s'agit d'excellents exercices : en topologie, peut-être encore davantage que pour les autres cours, une maîtrise approfondie du cours, et cela inclut les démonstrations, est indispensable.

L'étude des espaces métriques va nous permettre de réaliser un important procédé d'abstraction pour les notions que vous avez apprises pour les ensembles $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ (distance, norme, boule, voisinage, partie ouverte, partie fermée, etc). Notre but est de les étendre à des structures plus générales (comme des espaces de fonctions par exemple), sur lesquelles sont alors naturellement définies des notions comme celles de convergence et de continuité.

1.1 Définition et exemples

La première notion que l'on va introduire est celle d'espace métrique, c'est-à-dire un espace muni d'une distance qui permet de mesurer la distance entre deux points. Dans la suite, X sera un ensemble non vide.

Définition 1.1.1. On appelle **distance** une fonction $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés suivantes : pour tous $x, y, z \in X$

- $d(x, y) \geq 0$, (positivité)
- $d(x, y) = 0 \iff x = y$, (séparation)
- $d(x, y) = d(y, x)$ pour tous $x, y \in X$, (symétrie)
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire).

Dans ce cas, on appelle **espace métrique** le couple (X, d) .

Exemple 1.1.2. L'ensemble $X = \mathbb{R}$ muni de la distance usuelle $d(x, y) := |x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ est un espace métrique.

Exemple 1.1.3. L'ensemble $X = \mathbb{C}$ muni de la distance usuelle $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$ pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ est un espace métrique. Ici $|\cdot|$ est le module d'un nombre complexe.

Exemple 1.1.4. Un exemple important qui fournit de nombreux contre-exemple : soit X un ensemble quelconque non vide. On pose, pour tout $x, y \in X$,

$$d(x, y) := \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

On peut vérifier aisément que d est une distance sur X . On appelle cette distance la **distance discrète**. Dans (X, d) , deux points distincts sont à distance 1.

Sur un même ensemble X , on peut définir plusieurs distances (par exemple, $\mathbb{R}$ peut être muni de sa distance usuelle, ou de la distance discrète, ou de beaucoup d'autres). Certaines distances sont suffisamment « similaires » pour partager beaucoup de propriétés communes (ce que nous verrons plus tard). C'est dans cet esprit que l'on introduit la notion d'équivalence de distances.

Définition 1.1.5. Deux distances d_1 et d_2 sur X sont dites **équivalentes** s'il existe deux constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que pour tout $x, y \in X$

$$\alpha d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \beta d_2(x, y).$$

Exemple 1.1.6. On considère sur $X = \mathbb{R}$ la distance usuelle donnée par $||$ et la distance discrète d définie dans l'Exemple 1.1.4 ci-dessus. Ces deux distances ne sont pas équivalentes.

Exemple 1.1.7. Soit $X = \mathbb{R}^n$ ou $X = \mathbb{C}^n$, les fonctions suivantes sont des distances sur X .

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad d_p(x, y) := \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{pour tout } p \geq 1$$

$$d_\infty(x, y) := \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|$$

La distance d_2 sur $\mathbb{R}^n$ est dite **distance euclidienne**. Les distances d_p , $1 \leq p \leq \infty$, sont toutes équivalentes sur X (exercice!).

Donnons encore des exemples importants de distance.

Exemple 1.1.8. Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. On pose

$$\mathcal{B}(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y \mid \exists y \in Y \text{ t.q. } x \mapsto \delta(f(x), y) \text{ est bornée}\}$$

l'ensemble des fonctions bornées de X dans Y .

La fonction

$$\sigma(f, g) := \sup_{x \in X} \delta(f(x), g(x))$$

définit une distance sur $\mathcal{B}(X, Y)$. On appelle cette distance **distance uniforme**.

Trois derniers exemples très importants et sur lesquels nous reviendrons plus loin.

Définition 1.1.9 (Distance induite). Soit (X, d) un espace métrique et $Y \subset X$ une partie de X . La restriction $d_Y : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ de la distance d à $Y \times Y$, définie par $d_Y(y_1, y_2) := d(y_1, y_2)$, $\forall y_1, y_2 \in Y$, fait de (Y, d_Y) un espace métrique. On parle alors de **distance induite**.

Définition 1.1.10 (Distance produit). Soient $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \dots, (X_n, d_n)$, n espaces métriques. Notons $X := X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. Pour deux éléments $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de X posons

$$d(x, y) := \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i).$$

La fonction d est bien une distance sur X dite **distance produit** et (X, d) un espace métrique dit **espace produit**.

Enfin un exemple important est fourni par le cas des espaces vectoriels normés. On suppose que X est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ est soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.11 (Norme). On appelle **norme** une fonction $|| \cdot || : X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- $||x|| \geq 0$ pour tout $x \in X$, (positivité)
- $||x|| = 0 \iff x = 0$, (separation)
- $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$ pour tout $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ (homogénéité)
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ pour tout $x, y \in X$, (sous-additivité ou inégalité triangulaire).

Dans ce cas, on appelle **espace vectoriel normé (EVN)** le couple $(X, || \cdot ||)$.

La propriété suivante établit qu'un espace vectoriel normé est cas particulier d'espace métrique.

Proposition 1.1.12. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, alors

$$d_{\|\cdot\|}(x, y) := \|x - y\|$$

pour tout $x, y \in X$, définit une distance sur X , invariante par translation, non bornée si $X \neq \{0\}$.

Exemple 1.1.13. Soit $X = \mathbb{K}^n$, les fonctions suivantes sont des normes sur X .

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{pour tout } p \geq 1$$

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

Les distances de l'Exemple 1.1.7 sont les distances associées à ces normes.

Définition 1.1.14. Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur X sont dites **équivalentes** s'il existe deux constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que pour tout $x \in X$

$$\alpha \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \beta \|x\|_2.$$

Exemple 1.1.15. L'espace des matrices à n lignes et m colonnes $M_{n,m}(\mathbb{K})$ à entrées dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On peut identifier $M_{n,m}(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}^{nm}$. Les normes $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, sont donc des normes équivalentes sur $M_{n,m}(\mathbb{K})$.

1.2 Boules ouvertes, boules fermées, sphères

On se donne un espace métrique (X, d) . Grâce à la notion de distance on peut définir des boules d'une manière analogue aux disques du plan ou aux boules de l'espace. Cette notion sera à la base de celle de « voisinage » d'un point et de toutes les définitions qui suivront dans ce chapitre.

Définition 1.2.1. Soient $x \in X, r \in \mathbb{R}$.

On appelle **boule ouverte** de centre x et de rayon $r > 0$ l'ensemble

$$B(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}.$$

On appelle **boule fermée** de centre x et de rayon $r \geq 0$ l'ensemble

$$B^f(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}.$$

On appelle **sphère** de centre x et de rayon $r \geq 0$ l'ensemble

$$S(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) = r\}.$$

Remarque 1.2.2. Soit $x \in X$, et $r > 0$. On note que $x \in B(x, r)$, et donc $B(x, r) \neq \emptyset$. De plus :

$$B(x, r) \subset B^f(x, r) \quad \text{et} \quad S(x, r) \subset B^f(x, r),$$

et pour $x \in X$ et $0 < r_1 < r_2$:

$$B(x, r_1) \subset B(x, r_2) \quad \text{et} \quad B^f(x, r_1) \subset B^f(x, r_2).$$

Exemple 1.2.3. Soit (X, d) un espace métrique où X est un ensemble quelconque non vide et d est la distance discrète définie dans l'Exemple 1.1.4. Alors pour tout $x \in X$,

$$B(x, r) = \{x\} \text{ si } 0 < r \leq 1 \text{ et } B(x, r) = X \text{ si } r > 1;$$

$$B^f(x, r) = \{x\} \text{ si } 0 \leq r < 1 \text{ et } B^f(x, r) = X \text{ si } r \geq 1;$$

$$S_d(x, 0) = \{x\}, S(x, r) = \emptyset \text{ si } 0 < r < 1 \text{ et } S(x, 1) = X \setminus \{x\}, S(x, r) = \emptyset \text{ si } r > 1.$$

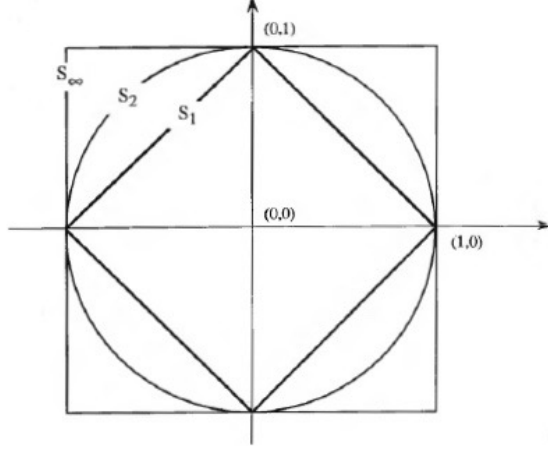


FIGURE 1 – Sphères unité dans $\mathbb{R}^2$ pour les normes $\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2, \| \cdot \|_\infty$

On remarque que la notion de boule dépend de la distance choisie. On peut donc comparer les boules données par des distances différentes.

Remarque 1.2.4. Soient (X, d) un espace métrique et Y une partie de X . On considère l'espace métrique (Y, d_Y) avec d_Y la distance induite. On a alors : $\forall x \in Y, r > 0$

$$B_{d_Y}(x, r) = Y \cap B_d(x, r).$$

Remarque 1.2.5. Soient d_1 et d_2 deux distances équivalentes sur X et $\alpha, \beta > 0$ telles que pour tout $x, y \in X$ deux constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que pour tout $x, y \in X$

$$\alpha d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \beta d_2(x, y).$$

Alors pour tout $x \in X, r > 0$, on a

$$B_{d_2}(x, r) \subset B_{d_1}(x, \beta r) \text{ et } B_{d_1}(x, r) \subset B_{d_2}(x, \frac{r}{\alpha}).$$

On en déduit alors que les boules ouvertes de même centre pour d_1 et d_2 sont emboîtées les unes dans les autres.

Toutes les définitions qui viennent utilisent la notion de boule ouverte et de distance. On pourra donc vérifier que deux distances équivalentes définissent les mêmes voisinages, points intérieurs, points adhérents, ouverts, fermés, parties bornées, suites convergentes, fonctions continues, etc.

1.3 Voisinages, points intérieurs et points adhérents

Soit (X, d) un espace métrique et E une partie de X , i.e. un sous-ensemble de X , $E \subset X$.

Définition 1.3.1. On dit que E est un **voisinage** de x , s'il existe une boule ouverte centrée en x contenue dans E . Autrement dit, si

$$\exists r > 0 \text{ t.q. } B(x, r) \subset E.$$

Définition 1.3.2.

i) Un point $x \in X$ est un **point intérieur** à E si E est un voisinage de x , i.e. si

$$\exists r > 0 \text{ t.q. } B(x, r) \subset E.$$

ii) Un point $x \in X$ est un **point adhérent** à E si tout voisinage de x a une intersection non vide avec E , i.e.

$$\forall r > 0, \exists x \text{ t.q. } x \in B(x, r) \cap E,$$

ou, de manière équivalente, $\forall r > 0, \exists y \in E \text{ t.q. } d(x, y) < r$.

Remarque 1.3.3. Noter qu'un point x adhérent à E peut appartenir à E ou à E^c . En revanche un point intérieur appartient forcément à E . D'un autre côté, si $x \in E$, alors x est forcément un point adhérent à E , mais il n'est pas forcément intérieur à E .

Définition 1.3.4. On appelle **distance de x à E** une partie non vide de X le nombre réel défini par

$$d(x, E) := \inf_{y \in E} d(x, y).$$

Proposition 1.3.5. Soit $E \neq X$ et $x \in X$. Alors

- i) x est un point intérieur à E si et seulement si $d(x, E^c) > 0$.
- ii) x est un point d'adhérence à E si et seulement si $d(x, E) = 0$.

Exemple 1.3.6. Soit $X = \mathbb{R}$ avec $d(x, y) := |x - y|$, i.e. $(\mathbb{R}, | \cdot |)$. On considère quatre réels $a < b < c < d$ et on introduit l'ensemble

$$E =]a, b[\cup \{c\} \cup [d, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \cup \{c\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq d\}.$$

Chaque point de E (c inclus) est adhérent à E . De plus, a et b sont aussi points adhérents à E .

Remarque 1.3.7. En regardant l'Exemple 1.3.6, on s'aperçoit que le point c est différent des autres points adhérents à E car il se trouve « tout seul ». On peut donc raffiner notre définition de point adhérent de la façon suivante.

Définition 1.3.8.

- i) Un point $x \in X$ est un **point isolé** de E si

$$\exists r > 0 \text{ t.q. } B(x, r) \cap E = \{x\}.$$

- ii) Un point $x \in X$ est un **point d'accumulation** de E si

$$\forall r > 0, \exists x \neq x \text{ t.q. } x \in B(x, r) \cap E.$$

Un point isolé ou d'accumulation est un point d'adhérence. Réciproquement, un point d'adhérence est soit isolé, soit d'accumulation !

En revenant à l'Exemple 1.3.6, c est point isolé alors que tous les points de $E \setminus \{c\}$ sont des points d'accumulation. Les points a et b sont aussi des points d'accumulation de E .

Définition 1.3.9. Un point $x \in X$ est un **point de frontière** de E si x est un point adhérent à E qui n'est pas intérieur à E , i.e.

$$\forall r > 0, \exists x_1 \in B(x, r) \cap E \text{ et } \exists x_2 \in B(x, r) \cap E^c.$$

Exemple 1.3.10. En revenant à l'Exemple 1.3.6, a, b, c, d sont points de frontière de E .

Exemple 1.3.11. On considère maintenant $\mathbb{Q}$ comme partie de $\mathbb{R}$. On sait que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$; il suit que chaque point de $\mathbb{R}$ est point d'accumulation et de frontière de $\mathbb{Q}$.

1.4 Parties ouvertes, parties fermées

Soit (X, d) un espace métrique et E une partie de X . Grâce aux définitions précédentes, on peut formaliser la notion de partie ouverte et partie fermée.

Définition 1.4.1.

- i) E est dite **partie ouverte** si chaque point de E est point intérieur à E .
- ii) E est dite **partie fermée** si elle contient tous ses points d'adhérence.

Définition 1.4.2. On appelle **topologie** l'ensemble des parties ouvertes.

Remarque 1.4.3. L'ensemble X tout entier est à la fois ouvert et fermé. Il en est de même pour l'ensemble vide. Pour tout $x \in X$, le singleton $\{x\}$ est une partie fermée de X . (Ces propriétés sont vraies pour n'importe quelle distance!)

ATTENTION : Un voisinage de x n'est pas forcément une partie ouverte!

Théorème 1.4.4. Soit (X, d) un espace métrique, $E \subset X$. Alors E est une partie fermée si et seulement si E^c est une partie ouverte.

Ce théorème est très important. Vous trouverez dans de nombreuses références cette définition pour une partie fermée ("une partie dont le complémentaire est un ouvert").

Preuve. $\Rightarrow$ Soit E une partie fermée. On veut montrer que E^c est ouverte, i.e. que chaque point de E^c est point intérieur à E^c . Soit $x \in E^c$, alors x n'est pas un point adhérent à E car E est une partie fermée, donc elle contient tous ses points adhérents. Il existe donc $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap E = \emptyset$, i.e. $B(x, r) \subset E^c$.

$\Leftarrow$ Soit E une partie de X telle que E^c soit une partie ouverte. On veut montrer que E contient tous ses points d'adhérence. Soit x un point d'adhérence de E . Supposons que $x \in E^c$. Comme E^c est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset E^c$. Cela contredit le fait que x est un point d'adhérence de E . On en déduit que $B(x, r) \cap E \neq \emptyset$. $\square$

Exemple 1.4.5. Dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$:

L'ensemble $E =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ est une partie ouverte : en effet pour tout $x \in E$, il existe $r = \min\{\frac{b-x}{2}, \frac{x-a}{2}\}$ tel que $B(x, r) \subset E$, donc x est intérieur à E .

Toutes les parties de type

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}, \quad]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

sont ouvertes, tandis que les parties

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}, \quad [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \quad]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$

sont fermées. Les parties

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \quad]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

ne sont ni ouvertes ni fermées. Les seules parties fermées et ouvertes de $\mathbb{R}$ sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}$.

On appelle **intervalle** de $\mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}$ de la forme $]-\infty, b[$, $]-\infty, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$, $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, +\infty[$.

Dans l'Exemple 1.3.6, $E =]a, b[\cup \{c\} \cup [d, +\infty[$ n'est pas ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1.4.6. Dans $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_2)$, soit $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ où

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \leq 1\} \\ E_2 &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 3 < x_1 < 4, x_2 = 1\} \\ E_3 &= \{(2, 2)\}. \end{aligned}$$

L'ensemble des points adhérents à E est : $E \cup \{(3, 1)\} \cup \{(4, 1)\}$. De plus $(2, 2)$ est un point isolé et les autres points sont des points d'accumulation.

L'ensemble des points intérieurs à E est : $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 < 1\}$.

L'ensemble des points de frontière de E est : $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1\} \cup \{(2, 2)\} \cup \{(x_1, 1) \mid 3 \leq x_1 \leq 4\}$.

Tous les autres points de $\mathbb{R}^2$ sont des points intérieurs à E^c .

E n'est pas une partie ouverte car $(2, 2) \in E$ n'est pas intérieur à E .

E n'est pas une partie fermée car le point d'adhérence $(3, 1)$ n'appartient pas à E .

Exemple 1.4.7. L'ensemble $]0, 1]$ n'est ni ouvert ni fermé dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$, est ouvert dans $(]-\infty, 1], | \cdot |)$, fermé dans $(]0, 2], | \cdot |)$, et ouvert et fermé dans $(]0, 1], | \cdot |)$. Ici, avec un abus de notation, on note encore $| \cdot |$ la distance induite.

Proposition 1.4.8.

- i) Toute union (même infinie) de parties ouvertes de (X, d) est une partie ouverte. Une intersection finie de parties ouvertes de (X, d) est une partie ouverte.
- ii) Toute intersection (même infinie) de parties fermées de (X, d) est une partie fermée. Une union finie de parties fermées de (X, d) est une partie fermée.

Preuve. i) Soit A un ensemble quelconque (fini ou infini) et O_α , $\alpha \in A$ une famille d'ouverts. On veut montrer que $\cup_{\alpha \in A} O_\alpha$ est ouvert. Soit $x \in \cup_{\alpha \in A} O_\alpha$. Il existe un indice $\alpha_0 \in A$ tel que $x \in O_{\alpha_0}$. Comme O_{α_0} est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset O_{\alpha_0}$ et donc $B(x, r) \subset \cup_{\alpha \in A} O_\alpha$.

Soit $J = \{1, \dots, n\}$ un ensemble fini et $(O_j)_{j \in J}$ une famille d'ouverts. On veut montrer que $\cap_{j \in J} O_j$ est ouvert. Soit $x \in \cap_{j \in J} O_j$. Pour tout $j \in J$, $x \in O_j$ et il existe donc $r_j > 0$ tel que $B(x, r_j) \subset O_j$. On définit $r = \min\{r_j ; j \in J\} > 0$ et on a bien $B(x, r) \subset \cap_{j \in J} O_j$.

- ii) Les affirmations sur les fermés se démontrent par passage au complémentaire.

□

Remarque 1.4.9. Une intersection infinie d'ouverts n'est pas toujours un ouvert (idem pour une union infinie de fermés)! Par exemple, dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$, on a

$$\bigcap_{k \geq 1} \left] -\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right[= \{0\} \subset \mathbb{R}.$$

Corollaire 1.4.10. Les ouverts de X sont les réunions de boules ouvertes.

1.5 Intérieur et adhérence d'une partie

Soit (X, d) un espace métrique E une partie de X .

Définition 1.5.1. On appelle **intérieur** de E , noté $\overset{\circ}{E}$, le plus grand (au sens de l'inclusion) ouvert inclus dans E c'est-à-dire la réunion de toutes les parties ouvertes de X incluses dans E . Si on note $\mathcal{O}_E$ l'ensemble des parties ouvertes de X incluses dans E , on a ainsi

$$\overset{\circ}{E} := \bigcup_{O \in \mathcal{O}_E} O.$$

Remarque 1.5.2. Noter que E contient toujours au moins une partie ouverte de E puisque $\emptyset \in \mathcal{O}_E$. La Proposition 1.7.15 assure que $\overset{\circ}{E}$ est une partie ouverte. On note que $E = \overset{\circ}{E}$ si et seulement si E est une partie ouverte.

Avec le théorème suivant, on montre que l'intérieur d'une partie E est bien l'ensemble de tous les points intérieurs à E .

Théorème 1.5.3. Soit (X, d) un espace métrique, $E \subset X$. Soit $\tilde{E}$ l'ensemble de tous les points intérieurs à E . Alors

$$\mathring{E} = \tilde{E}.$$

Preuve. Montrons d'abord que $\mathring{E} \subset \tilde{E}$. Pour tout $x \in \mathring{E}$, il existe un élément O de la famille $\mathcal{O}_E$ tel que $x \in O$. Il existe donc $r > 0$, $B(x, r) \subset O \subset E$ (car O ouvert et $O \subset E$!). Donc x est un point intérieur à E .

Montrons à présent que $\tilde{E} \subset \mathring{E}$. Soit $x \in \tilde{E}$. Il existe donc $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset E$. La boule $B(x, r)$ est ouverte et contenue dans E , donc $B(x, r) \in \mathcal{O}_E$. Donc $B(x, r) \subset \mathring{E}$ et donc $x \in \mathring{E}$. $\square$

On a un résultat analogue pour les parties fermées.

Définition 1.5.4. On appelle **adhérence** de E , notée $\overline{E}$, le plus petit (au sens de l'inclusion) **fermé contenant** E c'est-à-dire l'intersection de tous les fermés de X contenant E . Autrement dit, si on note $\mathcal{F}_E$ l'ensemble des parties fermées de X contenant E , on a

$$\overline{E} := \bigcap_{F \in \mathcal{F}_E} F.$$

Remarque 1.5.5. Noter que la famille $\mathcal{F}_E$ n'est jamais vide car $X \in \mathcal{F}_E$. La Proposition 1.7.15 assure que $\overline{E}$ est une partie fermée. On note que $E = \overline{E}$ si et seulement si E est une partie fermée.

Avec le théorème suivant, on montre que l'adhérence d'une partie E est bien l'ensemble de tous les points adhérents à E .

Théorème 1.5.6. Soit (X, d) un espace métrique, $E \subset X$. Soit E' l'ensemble de tous les points adhérents à E . Alors

$$\overline{E} = E'.$$

Preuve. Montrons que $E' \subset \overline{E}$. Soit $x \in E'$ et $F \in \mathcal{F}_E$. Montrons que $x \in F$ et pour cela, comme F est fermé on va montrer que x est un point adhérent à F . Comme x est un point adhérent à E , pour tout $r > 0$, il existe $y \in B(x, r) \cap E \subset B(x, r) \cap F$. Donc x est un point adhérent à F .

Montrons maintenant que $\overline{E} \subset E'$ ou plutôt puisque c'est équivalent $(E')^c \subset (\overline{E})^c$. Soit $x \in (E')^c$. Il existe donc $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap E = \emptyset$. Donc $B(x, r)^c$ est un fermé qui contient E et qui ne contient pas x . D'où $x \in (\overline{E})^c$. $\square$

Remarque 1.5.7. En récapitulant, on a $\mathring{E} \subset E \subset \overline{E}$.

Exemple 1.5.8. Dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$, on a

$$\begin{aligned} [a, b]^\circ &=]a, b[, & \overline{[a, b]} &= [a, b], &]a, b]^\circ &=]a, b[, & \overline{]a, b]} &= [a, b], \\ [a, b]^\circ &=]a, b[, & \overline{[a, b]} &= [a, b], &]a, b]^\circ &=]a, b[, & \overline{]a, b]} &= [a, b]. \end{aligned}$$

Le même raisonnement s'applique aux intervalles non bornés.

Dans l'Exemple 1.3.6, $E =]a, b[\cup \{c\} \cup [d, +\infty[$ alors $\mathring{E} =]a, b[\cup]d, +\infty[$ et $\overline{E} = [a, b] \cup \{c\} \cup [d, +\infty[$.

En utilisant les notions d'intérieur et d'adhérence à une partie, on peut définir la notion suivante.

Définition 1.5.9. On appelle **frontière** de E la partie ∂E définie par

$$\partial E := \overline{E} \setminus \mathring{E}.$$

Avec la proposition suivante, on montre que la frontière d'une partie E est bien l'ensemble de tous les points de frontière de E .

Proposition 1.5.10. Soit (X, d) un espace métrique, $E \subset X$. Soit E^* l'ensemble de tous les points de frontière de E . Alors

$$\partial E = E^*.$$

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la Définition 1.3.9. $\square$

Exemple 1.5.11. Dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$, on a

$$\partial[a, b] = \partial]a, b[= \partial[a, b[= \partial]a, b[= \{a, b\}.$$

Dans l'Exemple 1.3.6, $E =]a, b[\cup \{c\} \cup [d, +\infty[$ et alors $\partial E = \{a, b, c, d\}$.

Définition 1.5.12. — Soit $E \subset X$ une partie de X . On dit que E est **dense dans X** (ou dans (X, d)) lorsque l'adhérence de E est X , $\overline{E} = X$.

— Soient $E \subset V \subset X$ deux parties de X , on dit que E est **dense dans V** lorsque E est dense dans (V, d_V) où d_V est la distance induite.

Remarque 1.5.13. $E \subset X$ est dense dans $\overline{E}$.

Exemple 1.5.14. Dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont parties denses dans $\mathbb{R}$, mais $\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.

Remarque 1.5.15. Soient $E \subset V \subset X$ deux parties de X , alors E est dense dans V si et seulement si $\overline{E} \cap V = V$, i.e. $V \subset \overline{E}$, i.e.

$$\forall x \in V, \forall r > 0, \exists y \in B(x, r) \cap E.$$

Définition 1.5.16. On dit qu'une partie E est **d'intérieur vide** lorsqu'elle ne contient pas de partie ouverte non vide, c'est-à-dire lorsque $\overset{\circ}{E} = \emptyset$.

Proposition 1.5.17. Une partie E est d'intérieur vide si et seulement si E^c est dense dans X .

Preuve. On a $\overset{\circ}{E} = \emptyset \iff X \setminus \overset{\circ}{E} = X$. Comme $X \setminus \overset{\circ}{E} = \overline{X \setminus E}$ (Exercice !) on conclut facilement. $\square$

On notera bien que les notions d'intérieurs, d'adhérence et de densité dépendent de la métrique choisie. Par exemple pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{x\}$ est d'intérieur vide dans l'espace $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ mais pas si $\mathbb{R}$ est muni de la distance discrète.

1.6 Parties bornées et diamètre d'une partie

Soit (X, d) un espace métrique et E une partie de X .

Définition 1.6.1. La partie E est dite **bornée** si elle est contenue dans une boule, i.e.

$$\exists x \in X, r > 0 \text{ t.q. } E \subset B(x, r).$$

Définition 1.6.2. Si E est une partie non vide de (X, d) , on appelle **diamètre** de E

$$\text{diam}(E) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in E\} \in [0, +\infty].$$

Théorème 1.6.3. Soit (X, d) un espace métrique, $E \subset X$, $E \neq \emptyset$. Alors

- i) $\text{diam}(E) = 0$ si et seulement si $E = \{x\}$ pour un certain $x \in X$;
- ii) $\text{diam}(E) < +\infty$ si et seulement si E est une partie bornée ;
- iii) si $E \subset F$, alors $\text{diam}(E) \leq \text{diam}(F)$;
- iv) $\text{diam}(\overset{\circ}{E}) \leq \text{diam}(E) = \text{diam}(\overline{E})$.

Exemple 1.6.4. Dans l'Exemple 1.3.6, E n'est pas borné donc $\text{diam} E = +\infty$.

Dans l'Exemple 1.4.5, $[a, b[,]a, b[,]a, b], [a, b]$ sont des parties bornées de diamètre égal à $b - a$.

Dans l'Exemple 1.4.6, E est une partie bornée (E est contenue dans $B_d((0, 0), 5)$). Calculez son diamètre !

1.7 Suites

1.7.1 Convergence, unicité de la limite, etc.

Soit (X, d) un espace métrique non vide.

Définition 1.7.1. Une suite à valeurs dans X est une application $x : \mathbb{N} \rightarrow X$. On note $x_n := x(n)$ un terme de la suite et $(x_n)_{n \geq 0}$ la suite, parfois (x_n) .

Définition 1.7.2. On dit qu'une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est **bornée** si l'ensemble de ses valeurs $E := \{x_n, n \in \mathbb{N} \dots\}$ est une partie bornée de X .

Définition 1.7.3. On dit qu'une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ **converge vers** $y \in X$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ t.q. } \forall n \geq N, x_n \in B(y, \varepsilon),$$

ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ t.q. } \forall n \geq N, d(x_n, y) < \varepsilon.$$

ou encore : pour tout voisinage V de y ,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \text{ t.q. } \forall n \geq N, x_n \in V.$$

L'élément y est appelé **limite** de la suite et on écrit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = y,$$

ou encore :

$$x_n \rightarrow y \text{ pour } n \rightarrow +\infty,$$

ou encore :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y) = 0.$$

Exemple 1.7.4. Une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang N , i.e.

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, x_n = x_N.$$

Toute suite stationnaire est convergente, dans tout espace métrique.

On voit dans l'exemple ci-dessus que la notion de convergence d'une suite dépend de manière essentielle de la distance que l'on utilise. Cependant, deux distances équivalentes définissent les mêmes suites convergentes.

Théorème 1.7.5 (Unicité de la limite). Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite dans (X, d) . Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = y_1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = y_2,$$

alors $y_1 = y_2$.

Théorème 1.7.6. Une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ convergente dans (X, d) est une suite bornée.

Remarque 1.7.7. Une suite bornée n'est pas forcément convergente ! Par exemple la suite de terme général $x_n = (-1)^n$ dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ n'est pas bornée.

1.7.2 Caractérisation séquentielle d'une partie ouverte, fermée ou dense

Théorème 1.7.8. Soit (X, d) un espace métrique et E une partie non vide de X .

- i) Soit $y \in X$. Alors $y \in \overline{E}$ si et seulement si il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de points de E telle que $x_n \rightarrow y$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- ii) E est une partie fermée si et seulement si toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de points de E qui converge dans (X, d) a sa limite dans E .
- iii) E est une partie ouverte si et seulement si pour tout $y \in E$, toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans X qui converge vers y est à valeurs dans E à partir d'un certain rang.

Proposition 1.7.9. Soient $E \subset V \subset X$ deux parties de X . Alors E est dense dans V si et seulement si tout point $x \in V$ est limite d'une suite de E .

Fin Analyse 3 : résumé

Voici une fiche mémoire des définitions les plus importantes :

Distance Soit (X, d) un **espace métrique** i.e. un ensemble E muni d'une **métrique** ou **distance** d , c'est-à-dire une fonction vérifiant :

Définition 1.7.10. On appelle **distance** une fonction $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés suivantes : pour tous $x, y \in X$

- $d(x, y) \geq 0$, (positivité)
- $d(x, y) = 0 \iff x = y$, (séparation)
- $d(x, y) = d(y, x)$ pour tous $x, y \in X$, (symétrie)
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ pour tous $x, y, z \in X$, (inégalité triangulaire).

Boules On peut alors définir la notion de *boule* : pour tout $x \in X$ et $r > 0$ la **boule ouverte** de centre x et de rayon r est l'ensemble des points de X qui sont à distance strictement inférieure à r de x :

$$B(x, r) = \{y \in X, d(x, y) < r\};$$

pour tout $x \in X$ et $r \geq 0$ la **boule fermée** de centre x et de rayon r est l'ensemble des points de X qui sont à distance inférieure ou égale à r de x :

$$B^f(x, r) = \{y \in X, d(x, y) \leq r\}.$$

Ouverts On appelle alors **ouvert** tout ensemble $O \subset X$ vérifiant :

pour tout $x \in O$ il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset O$.

Cette définition signifie qu'en tout point de X on peut mettre une boule ouverte centrée en ce point incluse dans X (à condition de choisir le rayon assez petit). On dit parfois aussi que tout point de O est un **point intérieur** à O . On appelle **fermé** tout ensemble dont le complémentaire est un ouvert. L'ensemble des ouverts s'appelle la **topologie**.

Voisinage Un ensemble V est un **voisinage** du point $x \in X$ si on peut mettre une boule ouverte centrée en x incluse dans X (à condition de choisir le rayon assez petit) :

il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset V$.

On notera donc qu'un ensemble est ouvert s'il est un voisinage de chacun de ses points.

Intérieur L'**intérieur** $\overset{\circ}{U}$ d'une partie $U \subset X$ est l'ensemble des **points intérieurs** de U c'est à dire les points en lesquels il est possible de centrer une boule ouverte incluse dans U

$$\overset{\circ}{U} = \{x \in U, \exists r > 0 \text{ t.q. } B(x, r) \subset U\}.$$

Adhérence L'adhérence $\bar{U}$ d'une partie $U \subset X$ est l'ensemble des **points adhérents** à U i.e. les $x \in U$ tels que toute boule ouverte centrée en x intersecte U

$$\bar{U} = \{x \in U, \forall r > 0 \text{ t.q. } B(x, r) \cap U \neq \emptyset\}.$$

Partie dense On dit qu'une partie $U \subset X$ est **dense** dans X quand $\bar{U} = X$. Autrement dit U est dense dans X quand toute boule ouverte de X contient au moins un point de U .

Bornée Une partie $U \subset X$ est **bornée** si elle est incluse dans une boule.

Convergence de suite On dit qu'une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans X converge vers une limite $y \in X$ si, pour toute boule B ouverte centrée en y , $(x_n)_{n \geq 0}$ est à valeurs dans B à partir d'un certain rang :

pour tout $r > 0$ il existe un rang $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \in B(y, r)$.

Il y a différentes façons de définir les principales notions en topologie et donc différentes façons d'exposer cette théorie. Il faut donc avoir en tête les **différentes caractérisations possibles des notions** et être capable de jongler avec au gré des ouvrages ou exercices. Quelques exemples incluant aussi de simples reformulations :

Ouvert L'ensemble $O \subset X$ est ouvert si et seulement si

- (a) tous ses points sont des points intérieurs
- (b) O est un voisinage de chacun de ses points
- (c) son complémentaire est fermé
- (d) toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans X convergeant vers un point $y \in O$ est à valeurs dans O à partir d'un certain rang

Fermé L'ensemble $F \subset X$ est fermé si et seulement si

- (a) F contient tous ses points d'adhérence i.e. $\bar{F} = F$.
- (b) pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans F convergeant vers un point $y \in X$ on a $y \in F$

Intérieur L'intérieur de $U \subset X$ peut aussi être défini comme

- (a) le plus grand (pour l'inclusion) ouvert inclus dans U .
- (b) l'ensemble des points y vérifiant : toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans X convergeant vers y est à valeurs dans U à partir d'un certain rang (c'est la caractérisation séquentielle des points intérieurs)

Adhérence L'adhérence de $U \subset X$ peut aussi être défini comme

- (a) le plus petit (pour l'inclusion) fermé contenant U .
- (b) l'ensemble des points y vérifiant : il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans U convergeant vers y (c'est la caractérisation séquentielle des points adhérents qui donne aussi une caractérisation séquentielle de la densité)

Convergence de suite La suite $(x_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans X converge vers une limite $y \in X$ si, pour toute voisinage V de y , $(x_n)_{n \geq 0}$ est à valeurs dans V à partir d'un certain rang.

Autres définitions et propriétés vues au S3 :

Équivalence de distance

Définition 1.7.11. Deux distances d_1 et d_2 sur X sont dites **équivalentes** s'il existe deux constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que pour tout $x, y \in X$

$$\alpha d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \beta d_2(x, y).$$

Cette notion est importante car deux distances équivalentes définissent les mêmes voisinages, ouverts, fermés, parties bornées, partie intérieure, partie adhérente, suites convergentes ou encore fonctions continues comme nous le verrons plus loin.

Norme Une classe importante d'espaces métriques sont les espaces vectoriels normés.

Définition 1.7.12 (Norme). Soit X un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle **norme** une fonction $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- $\|x\| \geq 0$ pour tout $x \in X$, (positivité)
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$, (séparation)
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ pour tout $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ (homogénéité)
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tout $x, y \in X$, (sous-additivité ou inégalité triangulaire).

Dans ce cas, on appelle **espace vectoriel normé (EVN)** le couple $(X, \| \cdot \|)$.

La propriété suivante établit qu'un espace vectoriel normé est un cas particulier d'espace métrique.

Proposition 1.7.13. Soit $(X, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé, alors

$$d_{\| \cdot \|}(x, y) := \|x - y\|$$

pour tout $x, y \in X$, définit une distance sur X , invariante par translation, non bornée si $X \neq \{0\}$.

Il existe aussi une notion d'équivalence de normes :

Définition 1.7.14. Deux distances $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_2$ sur X sont dites **équivalentes** s'il existe deux constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que pour tout $x \in X$

$$\alpha \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \beta \|x\|_2.$$

Deux normes équivalentes produisent deux distances équivalentes.

n d'ouverts et fermés

Proposition 1.7.15.

- i) Toute union (même infinie) de parties ouvertes de (X, d) est une partie ouverte. Une intersection **finie** de parties ouvertes de (X, d) est une partie ouverte.
- ii) Toute intersection (même infinie) de parties fermées de (X, d) est une partie fermée. Une union **finie** de parties fermées de (X, d) est une partie fermée.

Unicité de la limite

Théorème 1.7.16 (Unicité de la limite). Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite dans (X, d) . Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = y_1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = y_2,$$

alors $y_1 = y_2$.

Théorème 1.7.17. Une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ convergente dans (X, d) est une suite bornée.

1.7.3 Suites extraites, valeurs d'adhérence.

Définition 1.7.18. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite. Une **suite extraite** ou **sous-suite** de $(x_n)_{n \geq 0}$ est une application $x \circ \phi : \mathbb{N} \rightarrow X$ où $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application **strictement croissante**. On note $(x_{\phi(n)})_{n \geq 0}$ la suite extraite.

On dit que $y \in X$ est une **valeur d'adhérence** de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$, s'il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n \geq 0}$ qui converge vers y dans (X, d) .

Proposition 1.7.19. Un point $y \in X$ est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } n \geq N \text{ et } d(x_n, y) < \varepsilon.$$

Autrement dit y est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ la boule de centre y et rayon ε contient une infinité de termes de $(x_n)_{n \geq 0}$.

Preuve. Soit $y \in X$ une valeur d'adhérence de la suite. Par définition il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n \geq 0}$ convergeant vers y . Soient $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ un entier. Il existe donc $N_1 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $x_{\phi(n)} \in B(y, \varepsilon)$. En choisissant n assez grand pour que $n \geq N_1$ et $\phi(n) \geq N$, par exemple en prenant $n \geq \max(N_1, N)$, on obtient $x_{\phi(n)} \in B(y, \varepsilon)$ et $\phi(n) \geq N$.

Réciproquement supposons que pour tout $\varepsilon > 0$ la boule de centre y et rayon ε contienne une infinité de termes de $(x_n)_{n \geq 0}$ et montrons que y est valeur d'adhérence. On va construire une extraction telle que la sous-suite correspondante converge vers y . On considère pour commencer $\varepsilon = 1$ et $N = 0$. On obtient ainsi n_1 tel que $d(x_{n_1}, y) < 1$ et on pose $\phi(1) = n_1$. Soit $K \geq 1$. Supposons construit $\phi(1) < \dots < \phi(K)$ tels que pour tout $k \leq K$, $d(x_{\phi(k)}, y) < 1/k$. On pose alors $\varepsilon = 1/(K+1)$ et $N = \phi(K) + 1$. Comme $B(y, 1/(K+1))$ contient une infinité de termes de la suite, il existe $n_{K+1} \geq N := \phi(K) + 1$ tel que $d(x_{n_{K+1}}, y) < 1/(K+1)$. On pose $\phi(K+1) = n_{K+1}$. Il reste à vérifier que $(x_{\phi(n)})_{n \geq 0}$ converge vers y mais c'est une conséquence directe de $(d(x_{\phi(n)}, y))_{n \geq 0}$ tend vers 0.

□

Théorème 1.7.20. *Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de (X, d) .*

- i) *Si $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers $y \in X$ alors toute sous-suite de $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers y .*
- ii) *La suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers $y \in X$ si et seulement si de toute sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n \geq 0}$ on peut extraire une sous-sous-suite $(x_{\phi \circ \psi(n)})_{n \geq 0}$ convergente vers y .*

Preuve. i) Soit $(x_{\phi(n)})_{n \geq 0}$ une sous-suite de $(x_n)_{n \geq 0}$ et $\varepsilon > 0$. Comme $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers y il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \in B(y, \varepsilon)$. Comme $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante, pour tout $n \geq 0$ $\phi(n) \geq n$. On a donc pour tout $n \geq N$, $\phi(n) \geq N$ et donc $x_{\phi(n)} \in B(y, \varepsilon)$.

- ii) Le sens direct est une conséquence du point précédent puisque une sous-sous-suite est encore une sous-suite ($\phi \circ \psi$ est encore strictement croissante).

Pour la réciproque on montre la contraposée. On suppose donc que $(x_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas vers y et il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que pour tout k il existe $n \geq k$ tel que $d(x_n, y) \geq \varepsilon$. En prenant $k = 1$ on obtient qu'il existe $n_1 \geq 1$ tel que $d(x_{n_1}, y) \geq \varepsilon$. On pose $\phi(1) = n_1$. On prend maintenant $k = n_1 + 1$ et on obtient l'existence de $n_2 \geq n_1 + 1$ tel que $d(x_{n_2}, y) \geq \varepsilon$. On pose $\phi(2) = n_2$. Et par récurrence, on construit une sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n \geq 0}$ telle que pour tout $n \geq 0$, $x_{\phi(n)} \notin B(y, \varepsilon)$ et on en déduit qu'aucune sous-suite de $(x_{\phi(n)})_{n \geq 0}$ ne peut converger vers y .

□

Attention, une suite qui admet une unique valeur d'adhérence ne converge pas forcément. Exemple : Dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$, la suite de terme général $x_{2n} = 1, x_{2n+1} = n, n \geq 0$.

Exemple 1.7.21. Dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$, la suite de terme général $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ possède exactement deux valeurs d'adhérence : -1 (limite de la sous-suite $(x_{2n+1})_{n \geq 0}$) et 1 (limite de la sous-suite $(x_{2n})_{n \geq 0}$).

La suite de terme général $x_n = n, n \geq 0$, n'a aucune valeur d'adhérence.

On montre maintenant un résultat qui concerne les suites dans $(\mathbb{R}^d, \| \cdot \|_\infty)$ et qui généralise un résultat vrai dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$. On verra plus tard, Corollaire 1.10.25, que le Théorème de Bolzano-Weierstrass est vrai dans n'importe quel espace vectoriel normé de *dimension finie*.

Théorème 1.7.22 (Théorème de Bolzano-Weierstrass dans $(\mathbb{R}^d, \| \cdot \|_\infty)$). *Toute suite bornée de $(\mathbb{R}^d, \| \cdot \|_\infty)$ admet (au moins) une valeur d'adhérence.*

Preuve. Soit $(x_k)_{k \geq 0}$ une suite bornée de $(\mathbb{R}^d, \| \cdot \|_\infty)$. Pour $d = 1$, nous renvoyons au cours d'Analyse 1. Supposons maintenant $d \geq 2$. On indique les coordonnées d'un point $y \in \mathbb{R}^d$ par un exposant, i.e. $y = (y^1, \dots, y^d)$. On va extraire une sous-suite convergente de la suite en d étapes correspondant aux d dimensions.

Puisque la suite $(x_k)_{k \geq 0}$ est bornée pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ (i.e. $\exists M > 0$ tel que $\|x_k\|_\infty = \max_{i=1,\dots,d} |x_k^i| < M$, pour tout $k \geq 0$), la suite réelle $(x_k^1)_{k \geq 0}$ est bornée dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ (car $|x_k^1| < M$, pour tout $k \geq 0$). Donc, par Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$, on peut extraire de $(x_k^1)_{k \geq 0}$ une sous-suite convergente $(x_{\phi_1(k)}^1)_{k \geq 0}$. Ainsi $(x_{\phi_1(k)})_{k \geq 0}$ est une sous-suite de $(x_k)_{k \geq 0}$ dont la première composante converge dans $\mathbb{R}$ vers une limite que l'on appelle y^1 .

On peut alors répéter le procédé : la suite $(x_{\phi_1(k)}^2)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, et on peut donc en extraire une sous-suite convergente $(x_{\phi_1 \circ \phi_2(k)}^2)_{k \geq 0}$. On note y^2 sa limite. Après ces deux extractions on obtient donc une sous-suite $(x_{\phi_1 \circ \phi_2(k)})_{k \geq 0}$ dont les deux premières composantes convergent. En effet $(x_{\phi_1 \circ \phi_2(k)}^1)_{k \geq 0}$ est une sous-suite de $(x_{\phi_1(k)}^1)_{k \geq 0}$ qui converge vers y^1 donc elle converge vers la même limite.

En procédant de la sorte d fois, on obtient d extractions $\phi_1, \dots, \phi_n$ et d points $y^1, \dots, y^n$. On pose alors $\psi = \phi_1 \circ \dots \circ \phi_d$ et on obtient que pour tout $i = 1, \dots, d$, $(x_{\psi(k)}^i)_{k \geq 0}$ converge vers y^i .

Il reste à montrer la convergence de $(x_{\psi(k)})_{k \geq 0}$ vers $y = (y^1, \dots, y^d)$ dans $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $i = 1, \dots, d$ il existe $K_i \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq K_i$, $|x_{\psi(k)}^i - y^i| < \varepsilon$. Finalement pour $k \geq K := \max_{i=1,\dots,d} K_i$, on a bien $\|x_{\psi(k)} - y\|_\infty < \varepsilon$. $\square$

1.8 Applications continues

Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ une application. On rappelle la notation suivante : pour tout partie $V \subset Y$

$$f^{-1}(V) := \{x \in X \mid f(x) \in V\}$$

est l'image réciproque de V par f . Cette notation fait sens pour toute fonction sans aucune hypothèses additionnelles. Elle définit ainsi une fonction

$$f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X).$$

Il ne faut pas la confondre avec l'application réciproque définie uniquement lorsque la fonction est bijective et pour laquelle on utilise la même notation. Dans ce cas :

$$f^{-1} : Y \rightarrow X$$

est la fonction qui associe à tout $y \in Y$ son unique antécédent par f dans X .

Définition 1.8.1. Soit $x \in X$ et $y \in Y$. On dit que f **tend vers** y en x si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall z \in B_d(x, \eta), f(z) \in B_\delta(y, \varepsilon),$$

ce qui équivaut à

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \text{ t.q. } B_d(x, \eta) \subset f^{-1}(B_\delta(y, \varepsilon)),$$

ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall z \in X, d(z, x) < \eta \implies \delta(f(z), y) < \varepsilon.$$

ou encore :

pour tout voisinage V de y , $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x .

Dans ce cas, on dit que y est la **limite** de f en x et on écrit

$$\lim_{z \rightarrow x} f(z) = y, \quad \text{ou} \quad f(z) \rightarrow y \text{ quand } z \rightarrow x.$$

Précisons que le dernier point dans cette définition est bien équivalent aux autres :

$\Rightarrow$ Soit V un voisinage de y . Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B_\delta(y, \varepsilon) \subset V$ et par définition de la convergence il existe $\eta > 0$ tel que

$$B_d(x, \eta) \subset f^{-1}(B_\delta(y, \varepsilon)).$$

On en déduit que $f^{-1}(V)$ contient $B_d(x, \eta)$ et c'est donc un voisinage de x .

$\Leftarrow$ Soit $\varepsilon > 0$. Alors $B_\delta(y, \varepsilon)$ est un voisinage de y donc $f^{-1}(B_\delta(y, \varepsilon))$ est un voisinage de x et il existe donc $\eta > 0$ tel que $B_d(x, \eta) \subset f^{-1}(B_\delta(y, \varepsilon))$.

Définition 1.8.2. Soient X_1, X_2, X_3 trois ensembles non vides. $f : X_1 \rightarrow X_2$ et $g : X_2 \rightarrow X_3$ deux applications. On définit **application composée** $g \circ f : X_1 \rightarrow X_3$ par $g \circ f(x_1) := g(f(x_1))$ pour tout $x_1 \in X_1$.

On a le résultat suivant pour ce qui est de la composition des limites.

Proposition 1.8.3. Soient (X_1, d_1) , (X_2, d_2) et (X_3, d_3) trois espaces métriques. $f : X_1 \rightarrow X_2$ et $g : X_2 \rightarrow X_3$ deux applications. On considère trois points $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ et $x_3 \in X_3$. Si f tend vers x_2 au point x_1 que g tend vers x_3 au point x_2 alors la composée $g \circ f : X_1 \rightarrow X_3$ tend vers x_3 au point x_1 .

Preuve. Soit V un voisinage de x_3 . Comme g a pour limite x_3 en x_2 on en déduit que $g^{-1}(V)$ est un voisinage de x_2 . Et comme f a pour limite x_2 en x_1 on a également que $f^{-1}(g^{-1}(V))$ est un voisinage de x_1 . Finalement $(g \circ f)^{-1}(V)$ est donc un voisinage de x_1 . $\square$

Théorème 1.8.4 (Caractérisation séquentielle). Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques, $f : X \rightarrow Y$ une application, x un point de X et y un point de Y . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) f tend vers y en x .
- ii) Pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de (X, d) convergente vers x , la suite $(f(x_n))_{n \geq 0}$ converge dans (Y, δ) vers y .

Preuve. $i \Rightarrow ii$. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de (X, d) convergent vers x . Soit $\varepsilon > 0$. Comme f a pour limite y en x , il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $z \in X$

$$z \in B_d(x, \eta) \implies f(z) \in B_\delta(y, \varepsilon).$$

Comme $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers x , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ $x_n \in B_d(x, \eta)$ et donc $\delta(f(x_n), y) < \varepsilon$.

$ii \Rightarrow i$. On procède par contraposée. Supposons que f ne tende pas vers y en x . Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \eta > 0 \exists z \in X, d(z, x) < \eta \text{ et } \delta(f(z), y) \geq \varepsilon.$$

En posant successivement $\eta = \frac{1}{n+1}$ pour $n \geq 0$, on peut donc construire une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ telle que pour tout $n \geq 0$, $d(x_n, x) < \frac{1}{n+1}$ et $\delta(f(x_n), y) \geq \varepsilon$. On a alors $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers x mais $(f(x_n))_{n \geq 0}$ ne converge pas vers y . $\square$

Définition 1.8.5. L'application f est **continue** en $x \in X$ si f tend vers $f(x)$ au point x .

Définition 1.8.6. Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ une application. On dira que f est **continue sur** $E \subset X$ si elle est continue en tout point x de E . Pour souligner les métriques utilisées, on écrira parfois $f : (X, d) \rightarrow (Y, \delta)$.

Exemple 1.8.7. Toute fonction $f : X \rightarrow Y$ d'un espace métrique X muni de la distance discrète d dans un espace métrique (Y, δ) est continue sur X . En effet, pour tout $x \in X$ et tout voisinage V de $f(x)$, on a $B_d(x, \frac{1}{2}) = \{x\} \subset f^{-1}(V)$.

Proposition 1.8.8. Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- i) L'application f est continue.
- ii) L'image réciproque $f^{-1}(O)$ de toute partie ouverte $O \subset Y$ est une partie ouverte de X .
- iii) L'image réciproque $f^{-1}(F)$ de toute partie fermée $F \subset Y$ est une partie fermée de X .

Remarque 1.8.9. Noter que l'image directe par $f : X \rightarrow Y$ continue d'une partie ouverte de X n'est pas forcément une partie ouverte dans Y . Considérer par exemple une fonction constante $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pour laquelle $f(\mathbb{R})$ est un singleton. De même l'image directe par $f : X \rightarrow Y$ continue d'une partie fermée de X n'est pas forcément une partie fermée dans Y . Considérer par exemple la fonction arctan : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pour laquelle $\arctan(\mathbb{R}) =] - \pi/2, \pi/2[$ est un intervalle ouvert.

Preuve. On note tout d'abord que ii) et iii) sont équivalents : en effet pour toute partie $A \subset Y$, $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$ et l'équivalence vient ensuite du fait qu'un ensemble est fermé si et seulement si son complémentaire est ouvert.

i) $\Rightarrow$ ii) Soient $O \subset Y$ une partie ouverte et $x \in f^{-1}(O)$. La partie O étant ouverte et contenant $f(x)$ il existe $\varepsilon > 0$ telle que $B_\delta(f(x), \varepsilon) \subset O$. Comme f est continue, il existe $\eta > 0$ tel que tout $z \in B_d(x, \eta)$ vérifie $f(z) \in B_\delta(f(x), \varepsilon) \subset O$. On en déduit que $f^{-1}(O)$ est un ouvert.

ii) $\Rightarrow$ i) Soient $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. Par ii), $f^{-1}(B_\delta(f(x), \varepsilon))$ est une partie ouverte contenant x et il existe donc $\eta > 0$ tel que $B_d(x, \eta) \subset f^{-1}(B_\delta(f(x), \varepsilon))$.

□

On en déduit :

Corollaire 1.8.10. Soient (X_1, d_1) , (X_2, d_2) et (X_3, d_3) trois espaces métriques et $f : X_1 \rightarrow X_2$ et $g : X_2 \rightarrow X_3$ deux applications. Si f et g sont continues alors $g \circ f$ est continue.

Comme dans le cas réel, on peut introduire une notion plus forte que la continuité, à savoir l'uniforme continuité.

Définition 1.8.11. Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ une application. L'application f est **uniformément continue** sur $E \subset X$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \text{ t.q. } \forall x \in E, B_d(x, \eta) \subset f^{-1}(B_\delta(f(x), \varepsilon)).$$

Remarque 1.8.12. Dans la phrase précédente η ne dépend donc pas de x , alors que dans le cas de la continuité usuelle, on pourrait prendre un η dépendant du point. Donc, la continuité uniforme est une propriété plus forte que la continuité. Il est important de comprendre cette notion d'uniformité qui est central en mathématiques et revient dans différents cadres. Il s'agit de bien comprendre que la proposition logique

$$\forall \varepsilon \exists \eta \quad \mathcal{P}(\varepsilon, \eta)$$

est moins forte que la proposition

$$\exists \eta \forall \varepsilon \quad \mathcal{P}(\varepsilon, \eta)$$

puisque dans le second cas on a l'existence d'un η qui convient pour tous les ε alors que dans le premier on a seulement pour ε l'existence d'un η adapté au ε mais qui peut varier quand on fait varier ε . La seconde proposition est une propriété uniforme contrairement à la première.

Définition 1.8.13. Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques, $f : X \rightarrow Y$ une application et $K \geq 0$. On dit que f est **K -Lipschitzienne** si pour $x_1, x_2 \in X$:

$$\delta(f(x_1), f(x_2)) \leq Kd(x_1, x_2).$$

Remarque 1.8.14. Les applications K -Lipschitziennes sont uniformément continues. En particulier, elles sont continues.

Exemple 1.8.15. — Toutes les applications constantes de (X, d) dans (X, d) sont 0-Lipschitz.

- L'application identité de (X, d) dans (X, d) est 1-Lipschitz.
- La norme d'un espace vectoriel normé dans $\mathbb{R}$ est 1-Lipschitz.
- Pour tout $y \in X$, la fonction $x \mapsto d(x, y)$ est 1-Lipschitz de (X, d) dans $\mathbb{R}$.
- Pour tout $E \subset X$ non vide, la fonction $x \mapsto d(x, E)$ est 1-Lipschitz de (X, d) dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.8.16. Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. Une application $f : X \rightarrow Y$ est **isométrique** lorsqu'elle préserve les distances : pour tous $x_1, x_2 \in X$

$$\delta(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2).$$

Une **isométrie** est une application bijective et isométrique (on notera qu'une application isométrique est nécessairement injective mais pas forcément bijective).

Remarque 1.8.17. Une application isométrique est 1-Lipschitz.

Définition 1.8.18. Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ une application. On dit que f est un **homéomorphisme** si elle est continue, bijective et que l'application réciproque est continue. On dit que (X, d) et (Y, δ) sont **homéomorphes** s'il existe un homéomorphisme entre (X, d) et (Y, δ) .

Remarque 1.8.19. Dans ce cas l'application réciproque f^{-1} est aussi un homéomorphisme. Un homéomorphisme f transforme :

- les parties ouvertes de X en les parties ouvertes de Y ;
- les parties fermées de X en les parties fermées de Y ;
- l'intérieur d'une partie de X en l'intérieur de la partie image de Y ;
- l'adhérence d'une partie de X en l'adhérence de la partie image de Y ;
- les suites convergentes dans X en des suites convergentes dans Y ;
- la limite d'une suite dans X en la limite de la suite image dans Y ;
- les points d'adhérence d'une suite dans X en les points d'adhérence de la suite image dans Y .

et réciproquement ! **Attention !** Un homéomorphisme ne transporte pas en général boules dans boules ni les parties bornées dans les parties bornées ! (voir Exemple ??)

Voici quelques contre-exemples de bijections continues dont la réciproque n'est pas continue et qui ne sont donc pas des homéomorphismes :

1. $f : ([0, 1[\cup \{2\}, |\cdot|) \rightarrow ([0, 1], |\cdot|)$ telle que $f(x) = x$ pour tout $x \in [0, 1[$ et $f(2) = 1$. On peut vérifier que f^{-1} n'est pas continue en 1 puisque $f^{-1}(1) = 2$, $B(2, 1/2) = \{2\}$ mais pour tout $\eta > 0$ $B(1, \eta)$ contient $1 - \eta/2$ et $f^{-1}(1 - \eta/2) = 1 - \eta/2 \notin \{2\}$.
2. Avec la même idée : l'application $f : ([0, 2\pi[, |\cdot|) \rightarrow (C, |\cdot|)$ où C désigne le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$ pour la norme euclidienne définie par $f(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ est bien continue et bijective mais f^{-1} n'est pas continue au point $(1, 0)$ du cercle.
3. Un exemple plus abstrait et très intéressant : considérons deux distances d_1 et d_2 sur le même espace X telles que la topologie $\mathcal{O}_1$ associée à d_1 contienne la topologie $\mathcal{O}_2$ associée à d_2 mais soit strictement plus grosse. Alors l'identité $Id : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$ est une bijection continue car pour tout $O \in \mathcal{O}_2$ $Id^{-1}(O) = O \in \mathcal{O}_1$. Par contre il existe $O \in \mathcal{O}_1$ qui ne soit pas dans $\mathcal{O}_2$ et donc l'image réciproque pour Id^{-1} de O est $(Id^{-1})^{-1}(O) = O$ et n'appartient pas à $\mathcal{O}_2$. Donc Id^{-1} n'est pas continue.

Un cas simple où on se trouve dans cette situation et lorsque l'on prend sur $\mathbb{R}$, la distance discrète pour d_1 et la distance associée à $|\cdot|$ pour d_2 .

En revanche lorsque les deux distances produisent les mêmes topologies (en particulier lorsqu'elles sont équivalentes) il est facile de voir avec ce même argument que l'identité est un homéomorphisme.

Exemple 1.8.20. Soit X un ensemble et d, d_* deux distances équivalentes sur X . L'application identité $Id : (X, d) \rightarrow (X, d_*)$ est un homéomorphisme.

En particulier, dans $\mathbb{R}^n$, les parties ouvertes, fermées, les notions d'adhérence, intérieur, limite, etc. sont les mêmes pour toutes les distances d_p , $1 \leq p \leq \infty$, qui proviennent des normes $\| \cdot \|_p$, $1 \leq p \leq \infty$ (et même pour toutes les normes, car on verra que deux normes quelconques sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, Théorème 1.10.23).

Continuité lorsque l'espace de départ ou d'arrivée est un espace produit muni de la métrique produit : soient $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \dots, (X_n, d_n)$, n espaces métriques. Notons $X := X_1 \times \dots \times X_n$. Pour deux éléments $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ de X posons

$$d(x, y) := \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i).$$

La fonction d est bien une distance sur X dite **distance produit** et (X, d) un espace métrique dit **espace produit** des espaces métriques $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \dots, (X_n, d_n)$ et on appelle **topologie produit** la topologie associée à (X, d) . Vous pouvez vous reporter au dernier exercice de la feuille de TD 1 pour la description de cette topologie ainsi que des fermés, voisinages, adhérences, intérieurs, ainsi que de la convergence.

On a les propriétés suivantes.

Proposition 1.8.21. Soit (Y, δ) un espace métrique.

1. Si $f : X \rightarrow Y$ est continue de (X, d) dans (Y, δ) alors pour tout $i = 1, \dots, n$, pour tout $\bar{x}_j \in X_j$, $j \neq i$, fixés, l'application partielle $f_i : X_i \rightarrow Y$

$$x \mapsto f_i(x) := f(\bar{x}_1 \times \dots \times \bar{x}_{i-1} \times x \times \bar{x}_{i+1} \times \dots \times \bar{x}_n),$$

est continue de (X_i, d_i) dans (Y, δ) .

2. $g : Y \rightarrow X$, $g = (g_1, \dots, g_n)$, g continue de (Y, δ) dans (X, d) si et seulement si chaque application coordonnée $g_i : Y \rightarrow X_i$ est continue de (Y, δ) dans (X_i, d_i) , pour tout $i = 1, \dots, n$.

Preuve. 1. On fixe $i = 1, \dots, n$ et $\bar{x} = \bar{x}_1 \times \dots \times \bar{x}_n \in X$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en $\bar{x}$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $\bar{y}$ vérifiant $d(\bar{x}, \bar{y}) < \eta$, $\delta(f(\bar{x}), f(\bar{y})) < \varepsilon$. En particulier pour tout $x \in E_i$ tel que $d_i(x, \bar{x}_i) < \eta$ on a $d((\bar{x}_1 \times \dots \times \bar{x}_{i-1} \times x \times \bar{x}_{i+1} \times \dots \times \bar{x}_n), \bar{x}) = d_i(x, \bar{x}_i) < \eta$ et donc $\delta(f(\bar{x}), f((\bar{x}_1 \times \dots \times \bar{x}_{i-1} \times x \times \bar{x}_{i+1} \times \dots \times \bar{x}_n))) < \varepsilon$.

2. Supposons g continue. Soit $1 \leq i \leq n$, $y \in Y$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $u \in B_\delta(y, \eta)$, $g(u) \in B_d(g(y), \varepsilon)$. En particulier $g_i(u) \in B_{d_i}(g_i(y), \varepsilon)$.

Réciproquement supposons que pour tout $1 \leq i \leq n$, g_i est continue. Soit $y \in Y$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $1 \leq i \leq n$ il existe $\eta_i > 0$ tel que pour tout $z \in Y$ satisfaisant $\delta(z, y) < \eta_i$ on ait $d_i(g_i(z), g_i(y)) < \varepsilon$. On pose $\eta = \min_{i=1, \dots, n} \eta_i$ et on obtient que pour tout $z \in Y$ satisfaisant $\delta(z, y) < \eta$ et tout $1 \leq i \leq n$ on a $d_i(g_i(z), g_i(y)) < \varepsilon$ et donc $d(g(z), g(y)) < \varepsilon$. □

Remarque 1.8.22. ATTENTION : La réciproque de la Proposition 1.8.21-1 est fausse. Contre-exemple : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2) = \frac{2x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}$ si $(x_1, x_2) \neq 0$ et $f(0, 0) = 0$. La fonction $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_1(x_1) = \frac{2x_1\bar{x}_2}{x_1^2+\bar{x}_2^2}$ est continue pour tout $\bar{x}_2 \in \mathbb{R}$ et, de même, la fonction $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_2(x_2) = \frac{2\bar{x}_1x_2}{\bar{x}_1^2+x_2^2}$ est continue pour tout $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}$. Cependant, f n'est pas continue en $(0, 0)$. En effet si f était continue en $(0, 0)$, l'application $x \mapsto f(x, x)$ (composition de f avec la fonction continue $x \mapsto (x, x)$) serait continue en $(0, 0)$ mais $f(x, x) = 1$ pour tout $x \neq 0$ et $f(0, 0) = 0$. Absurde !

Convergence uniforme et continuité

Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques.

Définition 1.8.23. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite d'applications de X dans Y , et $f : X \rightarrow Y$ une application.

On dit que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ **converge simplement** vers f sur X , lorsque

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ t.q. } \forall n \geq N, \delta(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Autrement dit $(f_n)_{n \geq 0}$ **converge simplement** vers f sur X si en tout point x de X $(f_n(x))_{n \geq 0}$ converge vers $f(x)$.

On dit que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ **converge uniformément** vers f sur X , lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ t.q. } \forall x \in X, \forall n \geq N, \delta(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

ou de façon équivalente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in X} \delta(f_n(x), f(x)) = 0.$$

Proposition 1.8.24. Si la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f , alors $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers f sur X .

Théorème 1.8.25 (Limite uniforme d'applications continues). Une limite uniforme d'applications continues est continue.

Autrement dit, si $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite d'applications continues de X dans Y , qui converge uniformément vers une application $f : X \rightarrow Y$ sur X , alors f est également continue sur X .

Preuve. Fixons $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. Comme la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f , il existe $N \geq 0$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$\forall y \in X, \delta(f_n(y), f(y)) \leq \varepsilon.$$

De plus, la fonction f_N étant continue en x , il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall y \in B_d(x, \eta), \delta(f_N(y), f_N(x)) \leq \varepsilon.$$

Par conséquent, pour tout $y \in B_d(x, \eta)$, on a

$$\delta(f(y), f(x)) \leq \delta(f(y), f_N(y)) + \delta(f_N(y), f_N(x)) + \delta(f_N(x), f(x)) \leq 3\varepsilon.$$

□

Remarque 1.8.26. En adaptant cette preuve on peut aussi montrer qu'une limite uniforme d'applications uniformément continues est uniformément continue.

Remarque 1.8.27. Ce n'est en général pas vrai avec la convergence simple ! Par exemple, dans les fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, la suite de fonction (f_n) donnée par $f_n(x) = x^n$ pour x dans $[0, 1]$ converge simplement vers la fonction qui vaut 1 en 1 et 0 ailleurs.

1.9 Topologie induite

Soit (X, d) un espace métrique et $E \subset X$ une partie de X . La restriction $d_E : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ de la distance d à $E \times E$, définie par $d_E(x_1, x_2) := d(x_1, x_2)$, pour tous $y_1, y_2 \in E$, fait de (E, d_E) un espace métrique. On parle alors de **distance induite**. Cette distance produit une topologie sur E appelée **topologie induite**.

Proposition 1.9.1. Soit (X, d) un espace métrique et $\mathcal{O}$ la topologie associée. Soit E une partie de X . La famille

$$\mathcal{O}_E = \{E \cap O \mid O \in \mathcal{O}\}$$

est la topologie induite sur E .

Autrement dit les ouverts de (E, d_E) sont les intersections d'ouverts de (X, d) avec E .

Preuve. Avant de démarrer la preuve, remarquons que pour tout $x \in E$ et tout $\varepsilon > 0$, $B_{d_E}(x, \varepsilon) = B_d(x, \varepsilon) \cap E$. Notons $\tilde{\mathcal{O}}_E$ la topologie induite par d_E sur E . On doit donc montrer que $\tilde{\mathcal{O}}_E = \mathcal{O}_E$.

$\mathcal{O}_E \subset \tilde{\mathcal{O}}_E$ Soit $O_E \in \mathcal{O}_E$. Il existe donc $O \in \mathcal{O}$ tel que $O_E = O \cap E$. Soit $x \in O_E$. Comme $O \in \mathcal{O}$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_d(x, \varepsilon) \subset O$. On en déduit que $B_{d_E}(x, \varepsilon) \subset O$ et donc $B_{d_E}(x, \varepsilon) \subset O_E$. Donc $O_E \in \tilde{\mathcal{O}}_E$.

$\tilde{\mathcal{O}}_E \subset \mathcal{O}_E$ Soit $O_E \in \tilde{\mathcal{O}}_E$. Pour tout $x \in O_E$ il existe $\varepsilon_x > 0$ tel que $B_{d_E}(x, \varepsilon_x) \subset O_E$. On pose maintenant

$$O = \bigcup_{x \in O_E} B_d(x, \varepsilon_x).$$

Comme O est un union d'ouverts $O \in \mathcal{O}$. On vérifie enfin que $O_E = O \cap E$ et donc $O_E \in \mathcal{O}_E$. $\square$

La notion de topologie induite joue un rôle important, notamment dans l'étude de la connexité ; il est donc important de bien se familiariser avec elle.

Proposition 1.9.2. i) Les parties fermées de $(E, \mathcal{O}_E)$ sont les intersections avec E des parties fermées pour $(X, \mathcal{O})$.

ii) Les voisinages de $x \in E$ pour $\mathcal{O}_E$ sont les intersections avec E des voisinages de x pour $(X, \mathcal{O})$.

iii) Si $A \subset E$, l'adhérence de A pour $\mathcal{O}_E$ est l'intersection avec E de l'adhérence de A pour $\mathcal{O}$.

iv) Si $A \subset E$, l'intérieur de A pour $\mathcal{O}_E$ contient $E \cap \mathring{A}$, où $\mathring{A}$ est l'intérieur de A pour $\mathcal{O}$.

v) La suite $(x_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans E converge dans $(E, \mathcal{O}_E)$ si et seulement si elle converge dans $(X, \mathcal{O})$ et sa limite appartient à E .

vi) Soient (Y, δ) un espace métrique et $f : X \rightarrow Y$ une application. On définit la restriction $f|_E : (E, d_E) \rightarrow Y$ par $f|_E(x) := f(x)$ pour tout $x \in E$. Alors

1. Si f est continue en $x \in E$, $f|_E$ est continue en x .

2. Si f est continue, alors $f|_E$ est continue.

3. Si E est un voisinage de x dans X et $f|_E$ est continue en x , alors f est continue en x .

On peut traduire l'affirmation iii) par : la continuité est une **propriété locale**.

Preuve. Exercice !

i) Soit $F \subset E$. Alors F est fermé dans (E, d_E) si et seulement si $E \setminus F = E \cap F^c$ est un ouvert de (E, d_E) c'est-à-dire si et seulement s'il existe un ouvert O de (X, d) tel que $E \cap F^c = O \cap E$. Et comme $E = (E \cap F^c) \cup^{disj.} F = (E \cap O^c) \cup^{disj.} (E \cap O)$ ce dernier point est équivalent à $F = O^c \cap E$.

ii) Soit V est un voisinage de $x \in E$ pour $\mathcal{O}$. Alors il existe $r > 0$ tel que $B_d(x, r) \subset V$. On a donc $B_{d_E}(x, r) = B_d(x, r) \cap E \subset V \cap E$ et on en déduit que $V \cap E$ est un voisinage de x dans E .

Réciproquement si V est un voisinage de $x \in E$ pour $\mathcal{O}_E$ alors il existe $r > 0$ tel que $B_{d_E}(x, r) \subset V$. On pose alors $\tilde{V} = V \cup B_d(x, r)$ qui est bien un voisinage de x dans (X, d) (car $\tilde{V}$ contient $B_d(x, r)$) et on a aussi $V = \tilde{V} \cap E$.

sont les intersections avec E des voisinages de x pour $(X, \mathcal{O})$.

vi) Soient (Y, δ) un espace métrique et $f : X \rightarrow Y$ une application. On définit la restriction $f|_E : (E, d_E) \rightarrow Y$ par $f|_E(x) := f(x)$ pour tout $x \in E$. Alors

1. Soit V un voisinage de $f(x)$ dans (Y, δ) . Alors $f|_E^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap E$. Comme f est continue en x , $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x dans (X, d) et par le point ii, $f^{-1}(V) \cap E$ est un voisinage de x dans (E, d_E) ce qui prouve bien la continuité en x pour $f|_E$.
2. C'est une conséquence du point précédent.
3. Soit V un voisinage de $f(x)$ dans (Y, δ) . Alors $f^{-1}(V) \supset f|_E^{-1}(V)$ qui est un voisinage de x dans (E, d_E) . D'après le point ii il existe un voisinage $\tilde{V}$ de x dans (X, d) tel que $f|_E^{-1}(V) = \tilde{V} \cap E$. Comme E est un voisinage de x on en déduit que $\tilde{V} \cap E$ est un voisinage de x et donc $f^{-1}(V)$ aussi.

□

Proposition 1.9.3. Soit (X, d) un espace métrique et $E \subset Y \subset X$. Alors les topologies induites sur E par $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}_Y$ sont les mêmes.

Preuve. Elles sont toutes deux définies par la restriction de d à E d'après la Proposition 1.9.1. □

Proposition 1.9.4. Soit (X, d) un espace métrique. Soit E une partie **ouverte** de X alors $A \in \mathcal{O}_E$ si et seulement si $A \in \mathcal{O}$ et $A \subset E$.

Preuve. Exercice ! □

1.10 Espaces vectoriels normés (rappels et nouveautés)

1.10.1 Définition et exemples

Un exemple particulier (et très important) d'espace métrique est celui des espaces vectoriels normés.

On suppose dans cette section que X est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ est soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.

Définition 1.10.1. On appelle **norme** une fonction $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- $\|x\| \geq 0$ pour tout $x \in X$, (positivité)
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$, (separation)
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ pour tout $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ (homogénéité)
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tout $x, y \in X$, (sous-additivité ou inégalité triangulaire).

Dans ce cas, on appelle **espace vectoriel normé (EVN)** le couple $(X, \| \cdot \|)$.

Sur un même espace vectoriel X , on peut définir plusieurs normes. Comme pour les distances, dans le but de les comparer, on introduit la notion d'équivalence de normes.

Définition 1.10.2. Deux normes $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_2$ sur X sont dites **équivalentes** s'il existe deux constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que pour tout $x \in X$

$$\alpha \|x\| \leq \|x\|_* \leq \beta \|x\|.$$

Exemple 1.10.3. Soit $X = \mathbb{K}^n$, les fonctions suivantes sont des normes sur X .

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{pour tout } p \geq 1$$

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

Preuve qu'il s'agit bien de normes : on prouve d'abord l'inégalité de Hölder. Pour tout $p, q \geq 1$ conjugué et tout $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Il suffit de la prouver quand toutes les coordonnées de x comme de y sont positives et, par homogénéité, dans le cas où $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. Dans ce cas on s'appuie sur l'inégalité de Jensen valable pour le log qui est concave afin de montrer que pour tout $u, v \geq 0$, $uv \leq u^p/p + u^q/q$. On obtient alors en sommant

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Nous pouvons maintenant prouver l'inégalité de Minkowski (qui est l'autre nom de l'inégalité triangulaire). On obtient en utilisant Hölder avec p et $q := \frac{p}{p-1}$ (qui sont bien conjugués)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \\ &= \|x\|_p \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} + \|y\|_p \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

et on obtient ce que l'on souhaite en divisant les deux membres par $(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p)^{\frac{p-1}{p}}$.

Les normes $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, sont toutes équivalentes sur X (Exercice!).

Exemple 1.10.4. L'espace des matrices à n lignes et m colonnes $M_{n,m}(\mathbb{K})$ à entrées dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On peut identifier $M_{n,m}(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}^{nm}$. Les normes $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, sont donc des normes équivalentes sur $M_{n,m}(\mathbb{K})$.

La propriété suivante établit qu'un espace vectoriel normé est cas particulier d'espace métrique.

Proposition 1.10.5. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, alors

$$d_{\|\cdot\|}(x, y) := \|x - y\|$$

pour tout $x, y \in X$, définit une distance sur X , invariante par translation, non bornée si $X \neq \{0\}$.

Preuve. Exercice! □

Dans le cas particulier d'un espace vectoriel normé les boules centrées en 0 de rayon 1 jouent le rôle de référence (car toutes les autres boules correspondent à des translations et/ou des homothéties de celles-ci).

Définition 1.10.6. Dans un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, $(X, \|\cdot\|)$, on appelle **boule unité ouverte** l'ensemble

$$B(0, 1) := \{x \in X \mid \|x\| < 1\}.$$

De manière analogue, on peut définir la boule unité fermée $B^f(0, 1)$ et la sphère unité $S(0, 1)$.

Remarque 1.10.7. Deux normes sur un espace vectoriel sont équivalentes si et seulement si elles définissent deux distances équivalentes.

Exemple 1.10.8. Soit X un ensemble non vide et $(Y, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. Soit

$$\mathcal{B}(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y \mid \exists M_f \geq 0 \text{ t.q. } \|f(x)\| \leq M_f, \forall x \in X\}$$

l'ensemble des applications bornées de X dans Y . Alors $\mathcal{B}(X, Y)$ est un espace vectoriel (de dimension infinie) sur $\mathbb{K}$ que l'on peut munir de la norme suivante (Exercice!) :

$$\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

On appelle cette norme la **norme uniforme**. Remarquer que la distance uniforme définie dans l'Exemple 1.1.8 provient de la norme uniforme si (Y, δ) est un espace vectoriel normé $(Y, \| \cdot \|)$ et $\delta(y, y') = \|y - y'\|$.

A noter : Si on prend $X = \mathbb{N}$ et $Y = \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) avec la norme $| \cdot |$, on obtient l'espace vectoriel normé $\ell^\infty(\mathbb{K})$ des suites bornées.

Exemple 1.10.9. Soit $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel (de dimension infinie) des fonctions continues d'un intervalle fermé $I = [a, b]$ dans $\mathbb{R}$, alors pour tout réel $p \geq 1$, $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$

$$\|f\|_p := \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

définit une norme sur $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ (Exercice!). On appelle cette norme **norme L^p** . La fonction $\| \cdot \|_\infty$ définie dans l'exemple précédent est aussi une norme sur $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(I, \mathbb{R})$. On note que si $1 \leq p < q$ les normes $\| \cdot \|_p$ et $\| \cdot \|_q$ ne sont pas équivalentes. En effet considérons par exemple la suite de fonctions continues sur $[0, 1]$ définies par $f_n(0) = f_n(2/n) = f_n(1) = 0$ et $f_n(1/n) = n^2$ et l'interpolation linéaire entre ces points. On montre que pour tout $p \geq 1$ il existe une constante c_p telle que $\|f_n\|_p = c_p n^{2-1/p}$. On en déduit que $(\|f_n\|_p / \|f_n\|_q)_{n \geq 0}$ converge vers 0 ce qui implique que les deux normes ne sont pas équivalentes.

Définition 1.10.10. Soit $(X, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé et Y un sous-espace vectoriel de X . La restriction $\| \cdot \|_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}$ de la norme $\| \cdot \|$ à Y , $\|y\|_Y := \|y\|, \forall y \in Y$, fait de $(Y, \| \cdot \|_Y)$ un espace vectoriel normé (Exercice!). On parle alors de **norme induite**.

Définition 1.10.11. Soient $(X_1, \| \cdot \|_1), (X_2, \| \cdot \|_2), \dots, (X_n, \| \cdot \|_n)$, n espaces vectoriels normés. Notons $X := X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. Pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ posons

$$\|x\| := \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_i.$$

La fonction $\| \cdot \|$ est bien une norme sur X dite **norme produit** et $(X, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé (Exercice!) dit **espace produit** des espaces vectoriels normés $(X_1, \| \cdot \|_1), (X_2, \| \cdot \|_2), \dots, (X_n, \| \cdot \|_n)$.

Revenons sur les notions de limite et de continuité dans le cas particulier d'un espace image qui est un espace vectoriel normé (ce qui inclut $(\mathbb{K}, | \cdot |)$ lui-même), on a aussi les propriétés suivantes.

Proposition 1.10.12. Soient (X, d) un espace métrique, $(Y, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ et $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications. Supposons que f tende vers $y_1 \in Y$ au point $x_0 \in X$ et que g tende vers $y_2 \in Y$ au même point $x_0 \in X$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

- i) $f + g \rightarrow y_1 + y_2$ et $\lambda g \rightarrow \lambda y_2$, lorsque $x \rightarrow x_0$.
- ii) Si $(Y, \| \cdot \|) = (\mathbb{K}, | \cdot |)$, alors $fg \rightarrow y_1 y_2$ lorsque $x \rightarrow x_0$. Si de plus $y_2 \neq 0$ alors $f/g \rightarrow y_1/y_2$ lorsque $x \rightarrow x_0$.

Proposition 1.10.13. Soient $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ deux espaces métriques, $(Y, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ et $f : X_1 \rightarrow Y, g : X_2 \rightarrow Y$, deux applications. On suppose que f tend vers $\bar{y}_1 \in Y$ au point $\bar{x}_1 \in X_1$ et que g tend vers $\bar{y}_2 \in Y$ au point $\bar{x}_2 \in X_2$. Alors :

- i) $f(x_1) + g(x_2) \rightarrow \bar{y}_1 + \bar{y}_2$ lorsque $(x_1, x_2) \rightarrow (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.
- ii) Si $(Y, \| \cdot \|) = (\mathbb{K}, | \cdot |)$, alors $f(x_1)g(x_2) \rightarrow \bar{y}_1 \bar{y}_2$ lorsque $(x_1, x_2) \rightarrow (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Si de plus $\bar{y}_2 \neq 0$ alors $f(x_1)/g(x_2) \rightarrow \bar{y}_1/\bar{y}_2$ lorsque $(x_1, x_2) \rightarrow (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.

Corollaire 1.10.14. Soient (X, d) un espace métrique, $(Y, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ et $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications continues en $x_0 \in X$. Alors :

- i) $f + g$ et $\lambda g, \lambda \in \mathbb{K}$, sont continues en x_0 .
- ii) Si $(Y, \| \cdot \|) = (\mathbb{K}, | \cdot |)$, alors fg est continue en x_0 . Si de plus $g(x_0) \neq 0$ alors f/g est continue en x_0 .

Corollaire 1.10.15. Soient (X_1, d_1) , (X_2, d_2) deux espaces métriques, $(Y, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ et $f : X_1 \rightarrow Y, g : X_2 \rightarrow Y$, deux applications. Soit f continue en $\bar{x}_1 \in X_1$ et g continue en $\bar{x}_2 \in X_2$. Alors :

- i) $h : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ définie par $h(x_1, x_2) := f(x_1) + g(x_2)$ est continue en $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.
- ii) Si $(Y, \|\cdot\|) = (\mathbb{K}, |\cdot|)$, alors $p : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $p(x_1, x_2) := f(x_1)g(x_2)$ est continue en $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Si $g(\bar{x}_2) \neq 0$ alors $q : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $q(x_1, x_2) := f(x_1)/g(x_2)$ est continue en $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.

1.10.2 Espaces préhilbertien et espaces euclidiens

Un cas particulier d'évn est donné par la notion d'espace préhilbertien. On suppose dans cette section que X est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Le cas complexe pourrait être inclus ici, mais supposerait de faire attention à la conjugaison complexe (voir le cours d'Algèbre 3).

Définition 1.10.16. On appelle **produit scalaire** une fonction $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

- $\forall x \in X, \langle x, x \rangle \geq 0$ (positivité) ;
- $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ ("définition"),
- $\forall x, y \in X, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (symétrie),
- $\forall x, y, z \in X, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ (bilinéarité).

On appelle **espace préhilbertien** le couple $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Si X est un espace vectoriel de dimension finie le couple $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est dit **espace euclidien**.

Exemple 1.10.17. $X = \mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire canonique $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$ pour tout $x, y \in X$ est un espace euclidien.

Exemple 1.10.18. L'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées $n \times n$ à entrées dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire défini par : pour tous $A, B \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(^tAB),$$

est un espace euclidien. (Exercice!)

Exemple 1.10.19. Soit $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues d'un intervalle fermé $I = [a, b]$ dans $\mathbb{R}$, on définit un produit scalaire en posant

$$\forall f, g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}), \quad \langle f, g \rangle := \int_I f(x)g(x)dx.$$

Le couple $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien (Exercice!).

Proposition 1.10.20. (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur X , alors pour tout $x, y \in X$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{1/2} \langle y, y \rangle^{1/2},$$

avec égalité si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.

Un espace préhilbertien (et donc un espace euclidien) est un espace vectoriel normé (et donc aussi un espace métrique).

Proposition 1.10.21. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur X , alors on obtient une norme sur X en posant pour tout $x \in X$

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Preuve. Exercice! □

Proposition 1.10.22. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur X et $x, y \in X$. Alors

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (\text{identité du parallélogramme}),$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\|x + y\|^2 - \frac{1}{4}\|x - y\|^2 \quad (\text{identité de polarisation}),$$

et on a $\langle x, y \rangle = 0$ si et seulement si

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (\text{théorème de Pythagore}).$$

Preuve. Exercice ! □

1.10.3 Equivalence des normes en dimension finie

Théorème 1.10.23. Soit X un espace vectoriel de dimension finie. Alors les normes sur X sont toutes équivalentes.

Preuve. On se contente du cas d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel celui d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel étant similaire. On se donne une norme de référence $\|\cdot\|_\infty$ sur X en choisissant une base $(e_1, \dots, e_n)$ de X et en posant pour $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$

$$\|x\|_\infty := \max\{|\lambda_i| \mid i = 1, \dots, n\}.$$

Montrons tout d'abord que le théorème de Bolzano-Weierstrass est encore vrai dans $(X, \|\cdot\|_\infty)$. On peut refaire la preuve faite dans $\mathbb{R}^n$ ou utiliser l'application

$$L : (X, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$$

définie par $L(x) = L(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ pour se ramener au cas de $\mathbb{R}^n$. On note que L est une isométrie linéaire. Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $(X, \|\cdot\|_\infty)$, la suite $(L(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est donc une suite bornée de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ et par Bolzano-Weierstrass admet une sous-suite convergente $(L(x_{\phi(k)}))_{k \in \mathbb{N}}$. Et comme L est une isométrie, on obtient que $(x_{\phi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite convergente de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Passons à la preuve proprement dite : la stratégie est de **montrer que toute norme est équivalente à la norme infini** $\|\cdot\|_\infty$. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur X . Pour tout $x \in X$

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \|e_k\| \leq \sum_{k=1}^n \|x\|_\infty \|e_k\| \leq C_1 \|x\|_\infty,$$

où $C_1 = n \max_{1 \leq k \leq n} \|e_k\|$. On a donc une première majoration et on note aussi au passage que la convergence pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ implique la convergence pour la norme $\|\cdot\|$.

Montrons ensuite qu'il existe $C_2 > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $\|x\|_\infty \leq C_2 \|x\|$. Supposons par contradiction que

$$\forall m > 0 \exists x_m \text{ tel que } \|x_m\|_\infty > m \|x_m\|.$$

Considérons la suite $(y_m)_{m \geq 1} := \left(\frac{x_m}{\|x_m\|_\infty} \right)_{m \geq 1}$. D'une part cette suite tend vers 0 dans $(X, \|\cdot\|)$.

D'autre part, $\|y_m\|_\infty = 1$ et par Bolzano-Weierstrass (que l'on vient de prouver dans $(X, \|\cdot\|_\infty)$) on peut extraire une sous-suite $(y_{\phi(m)})_{m \geq 1}$ convergente vers $y \in X$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Grâce à l'étape précédente cette convergence a aussi lieu pour $\|\cdot\|$: $\|y_{\phi(m)} - y\| \rightarrow 0$ quand m tend vers $+\infty$. Or, $(y_{\phi(m)})_{m \geq 1}$ étant une sous-suite de $(y_m)_{m \geq 1}$, il est aussi vrai que $(y_{\phi(m)})_{m \geq 1} \rightarrow 0$ pour $\|\cdot\|$ et par unicité de la limite $y = 0$.

Cependant $\|y\|_\infty = 1$ puisque

$$|\|y\|_\infty - 1| = |\|y\|_\infty - \|y_{\phi(m)}\|_\infty| \leq \|y - y_{\phi(m)}\|_\infty \rightarrow 0.$$

On tient donc notre contradiction. □

Remarque 1.10.24. L'hypothèse de **dimension finie** est nécessaire! **Contre-exemple** : Les normes $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_\infty$ sur $C([0, 1], \mathbb{R})$ (voir Exemple 1.10.9 pour la définition de ces normes) ne sont pas équivalentes. En effet, la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de fonctions $C([0, 1], \mathbb{R})$ où f_n est définie pour $n \geq 1$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ -nx + 1 & x \in]0, \frac{1}{n}] \\ 0 & x \in]\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

converge pour $\| \cdot \|_1$, mais pas pour $\| \cdot \|_\infty$. Ces deux normes ne sont même pas topologiquement équivalentes! On a également vu ci-dessus que les normes $\| \cdot \|_p$ ne sont pas équivalentes entre elles pour $p \geq 1$.

Conséquence très importante de l'équivalence des normes : comme deux normes quelconques sur un espace vectoriel de **dimension finie** sont équivalentes (voir Théorème 1.10.23), toutes les distances qui proviennent d'une norme sur un espace vectoriel de dimension finie définissent les mêmes voisinages, points intérieurs, points adhérents, ouverts, fermés, parties bornées, etc., suites convergentes et fonctions continues. Sur un espace vectoriel normé de dimension finie (par exemple sur $\mathbb{R}^n$), on parlera donc plus simplement de voisinages, ouverts, fermés, etc. sans spécifier la distance, quand on fait référence aux , voisinages, ouverts, fermés, etc. pour n'importe quelle distance provenant d'une norme.

Grâce à ces résultats, nous pouvons à présent utiliser, dans les espaces normés à dimension finie, la norme plus utile dans chaque situation. Par exemple, en utilisant la norme $\| \cdot \|_\infty$, on pourra dire qu'une suite dans $\mathbb{R}^n$ converge si et seulement si la suite de chacune de ses composantes converge, et qu'une suite dans $\mathbb{R}^n$ est bornée si et seulement si la suite de chacune de ses composantes est bornée, ces affirmations restant vraies quelle que soit la norme utilisée.

Dans la preuve précédente, on a montré aussi que, si X est un espace vectoriel de dimension finie, alors $(X, \| \cdot \|_\infty)$ satisfait le Théorème de Bolzano-Weierstrass. Comme les normes sont toutes équivalentes sur X , on a obtenu la propriété suivante.

Corollaire 1.10.25 (Théorème de Bolzano-Weierstrass). *Soit $(X, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Toute suite bornée de $(X, \| \cdot \|)$ admet (au moins) une valeur d'adhérence.*

Corollaire 1.10.26. *Soit $(X, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé de dimension quelconque et $Y \subset X$ un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors,*

- i) *Toute norme $\| \cdot \|_*$ sur Y est équivalente à la norme induite $\| \cdot \|_Y$ (voir Définition 1.10.10).*
- ii) *Toute suite bornée de Y admet une valeur d'adhérence dans Y .*
- iii) *Y est fermé dans $(X, \| \cdot \|)$.*

Preuve. i) Y étant un espace vectoriel de dimension finie, satisfait le Théorème 1.10.23. Toute norme est donc équivalente sur Y et, en particulier, toute norme est équivalente à la norme induite $\| \cdot \|_Y$.

ii) De plus, Y étant un espace vectoriel de dimension finie, satisfait aussi le Corollaire 1.10.25. Donc toute suite bornée pour n'importe quelle norme $\| \cdot \|_*$ sur Y admet (au moins) une valeur d'adhérence dans Y .

iii) On utilise pour ce point la caractérisation séquentielle : soit donc $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite convergente à valeurs dans Y . On note x sa limite et on doit montrer que $x \in Y$. La suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est convergente donc bornée dans $(X, \| \cdot \|)$ et donc aussi dans $(Y, \| \cdot \|_Y)$ où $\| \cdot \|_Y$ désigne la norme induite (=la restriction) par $\| \cdot \|$ sur Y . Comme Y est de dimension finie, la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ qui est bornée admet une valeur d'adhérence $x \in Y$. On a donc $x = y$ puisque x est la seule valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \geq 0}$.

□

2 Compacité

2.1 Compacité au sens de Bolzano-Weierstrass

Définition 2.1.1. (Compacité au sens de Bolzano-Weierstrass ou compacité séquentielle) Un espace métrique (X, d) est **compact** si toute suite de X admet (au moins) une valeur d'adhérence.

Une partie E de X est **compacte** si (E, d_E) est compact (où d_E désigne la métrique induite) autrement dit si toute suite de E admet une valeur d'adhérence dans E .

Remarque 2.1.2. La compacité d'une partie E est une propriété intrinsèque. i.e. elle ne dépend que de l'espace métrique (E, d_E) et non de l'espace métrique ambiant (X, d) .

Exemple 2.1.3. — Dans un espace métrique (X, d) , l'ensemble vide $\emptyset$ est toujours compact.

Tout singleton est compact. Si $x \neq y \in X$ alors $\{x\} \cup \{y\}$ est compact et plus généralement si X est fini alors (X, d) est compact car il existe une sous-suite constante.

- Tout intervalle $[a, b]$ de $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ est compact (en effet $[a, b]$ est borné donc, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, toute suite de $[a, b]$ admet au moins une valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$. Comme $[a, b]$ est fermé cette valeur est dans $[a, b]$!)

- Deux exemples de parties non compactes de $\mathbb{R}$:

1. $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ n'est pas compact (prendre $x_n = n$).
2. L'intervalle $]a, b[$ n'est pas compact car la suite $(b - 1/n)$ qui est bien à valeur dans $]a, b[$ pour n assez grand n'a pas de valeur d'adhérence dans $]a, b[$.

Proposition 2.1.4. Soit (X, d) un espace métrique et E une partie de X .

- i) Si E est compacte alors E est fermée et bornée dans (X, d) .
- ii) Si X est compact et E est fermée dans (X, d) , alors E est compacte.

Preuve. i) Soit E une partie compacte de X .

Fermée : utilisons la caractérisation séquentielle : on considère une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de points de E convergeant vers $x \in X$. Alors $(x_n)_{n \geq 0}$ admet une seule valeur d'adhérence (sa limite x) dans (X, d) et par compacité $(x_n)_{n \geq 0}$ a une valeur d'adhérence dans E . Donc x appartient à E .

Bornée : supposons que E ne soit pas bornée. Soit $z \in E$. On peut construire une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de E telle que $d(z, x_n) \geq n$, pour tout $n \geq 0$. Toute sous-suite de $(x_n)_{n \geq 0}$ est non bornée et donc non convergente.

- ii) Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de points de $E \subset X$. Comme X compact, $(x_n)_{n \geq 0}$ possède une sous-suite convergente dans X . Comme de plus E est fermée la limite de cette sous-suite appartient à E .

□

Remarque 2.1.5. 1. En particulier un espace métrique compact (X, d) est borné.

2. Soit (X, d) un espace métrique et E une partie compacte de X . Si $F \subset E$ est un fermé de X alors F est compact (puisque F est aussi un fermé de E).

Attention : la réciproque du premier point de la proposition précédente n'est pas vraie. Par exemple la boule unité fermée de $\mathbb{R}$ munie de la distance discrète est $\mathbb{R}$ tout entier mais la suite $x_n = n$, $n \geq 0$ n'a pas de valeur d'adhérence puisque les seules suites convergentes sont les suites stationnaires.

Cependant nous verrons plus tard un cadre où la réciproque est vraie. Notons déjà que l'on peut caractériser les parties compactes de $\mathbb{R}$.

Corollaire 2.1.6. Une partie E de $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Preuve. $\Rightarrow$ est une conséquence de la Proposition 2.1.4. Cette implication est toujours vraie et n'a rien à voir avec $\mathbb{R}$!

$\Leftarrow$ Soit $E \subset \mathbb{R}$ une partie fermée et bornée. Elle est donc incluse dans un intervalle $[-r, r]$, $r > 0$, qui est compact et on conclut facilement avec la Proposition précédente. $\square$

La proposition suivante est parfois bien utile pour montrer qu'une suite est convergente.

Proposition 2.1.7. *Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite à valeurs dans un espace métrique compact (X, d) . Alors cette suite est convergente si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.*

Preuve. $\Rightarrow$ Toute suite convergente dans un espace métrique quelconque a une unique valeur d'adhérence. Cette implication est donc générale et n'utilise pas l'hypothèse de compacité.

$\Leftarrow$ Supposons maintenant que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ a une unique valeur d'adhérence $z \in X$. Procédons par l'absurde et supposons que $(x_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas vers z . Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $F := X \setminus B(z, \varepsilon)$ contient une infinité de termes de la suite. Cette partie F est fermée dans X , donc compacte. On obtient donc une seconde valeur d'adhérence $y \in F$ (et donc $y \neq z$) pour $(x_n)_{n \geq 0}$. $\square$

Proposition 2.1.8. *Soient $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \dots, (X_n, d_n)$, n espaces métriques et (X, d) l'espace métrique produit introduit dans la Définition 1.1.10. (X, d) est compact si et seulement si (X_i, d_i) est compact pour tout $i = 1, \dots, n$.*

Preuve. Exercice : on pourra par exemple s'inspirer de la preuve de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}^n$. $\square$

Encore un exercice :

Proposition 2.1.9. *Soient (X, d) un espace métrique et $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante (pour l'inclusion) de parties compactes, non vides de X . Alors $K := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ est compacte et non vide.*

2.2 Compacité et continuité.

Proposition 2.2.1. *Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Si X est compact alors $f(X)$ est compact.*

Preuve. Soit $(y_n)_{n \geq 0}$ une suite de $f(X)$. Pour tout $n \geq 1$, il existe donc $x_n \in X$ tel que $f(x_n) = y_n$. Comme X est compact, il existe une suite extraite $(x_{\phi(n)})_{n \geq 0}$ qui converge vers une limite $z \in X$. Comme f est continue, la suite $(y_{\phi(n)}) = (f(x_{\phi(n)}))$ converge vers $f(z) \in f(X)$. $\square$

Corollaire 2.2.2. *Soient (X, d) et (X, δ) deux espaces métriques topologiquement équivalents. Alors (X, d) est compact si et seulement si (X, δ) est compact.*

Preuve. En effet dans ce cas l'identité $(X, d) \rightarrow (X, \delta)$ est un homéomorphisme et on conclut facilement avec la proposition précédente. $\square$

Le corollaire précédent signifie donc que la compacité ne dépend de la métrique que à travers la topologie qu'elle engendre.

Une autre application fondamentale concerne les extrema des fonctions à valeurs réelles.

Corollaire 2.2.3. *Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue à valeurs réelles, définie sur un espace métrique compact non vide (X, d) . Alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Preuve. L'image $f(X) \subset \mathbb{R}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$. Elle est donc bornée et admet ainsi une borne inférieure et une borne supérieure. On vérifie que $\sup\{f(x) \mid x \in X\}$ est point adhérent de $f(X)$ et, puisque $f(X) \subset \mathbb{R}$ est fermée, $\sup\{f(x) \mid x \in X\} \in f(X)$. De même pour l'inf. $\square$

La compacité assure l'uniforme continuité d'une application.

Théorème 2.2.4 (Théorème de Heine). Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. Si (X, d) est compact et $f : (X, d) \rightarrow (Y, \delta)$ est continue, alors f est uniformément continue.

Preuve. On rappelle que f est uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall x, y \in X \ d(x, y) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Raisonnons par l'absurde. On admet donc qu'il existe $\varepsilon > 0$ et deux suites $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}$ de X telles que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ mais $\delta(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon$ pour tout $n \geq 0$. Comme X est compact on peut extraire une sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n \geq 0}$ convergeant vers $x \in X$. La suite $(y_{\phi(n)})_{n \geq 0}$ converge aussi vers x car $d(y_{\phi(n)}, x) \leq d(y_{\phi(n)}, x_{\phi(n)}) + d(x_{\phi(n)}, x) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$. Comme f est continue en x on a $f(x_{\phi(n)}) \rightarrow f(x)$ et $f(y_{\phi(n)}) \rightarrow f(x)$. On en déduit que $\delta(f(x_{\phi(n)}), f(y_{\phi(n)})) \rightarrow 0$ ce qui contredit $\delta(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon$ pour tout $n \geq 0$. $\square$

Théorème 2.2.5. Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. Si (X, d) est compact et $f : (X, d) \rightarrow (Y, \delta)$ est bijective et continue, alors f est un homéomorphisme.

Preuve. Il suffit de montrer que l'application réciproque $f^{-1} : (Y, \delta) \rightarrow (X, d)$ est continue. On va pour cela montrer que l'image réciproque de tout fermé de X par f^{-1} est un fermé de Y . Soit $E \subset X$ un fermé. Alors E est compacte car fermée dans X compact (Proposition 2.1.4-ii)). Or $(f^{-1})^{-1}(E) = f(E)$ (car f bijective) est compacte car f continue (Proposition 4.1.4) et par conséquent fermée (Proposition 2.1.4-i)). $\square$

2.3 Compacité dans un espace normé

On travaille dans cette section dans un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$ et on note d la distance définie par la norme $d(x, y) = \|x - y\|$, pour tout $x, y \in X$.

Théorème 2.3.1. Dans un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$, les points suivants sont équivalents :

- i) La sphère unité $S(0, 1)$ est compacte.
- ii) La boule unité fermée $B^f(0, 1)$ est compacte.
- iii) Toute boule fermée est compacte.
- iv) Tous les fermés bornés sont compacts.

Cette proposition signifie que dans un evn donné il n'y a que deux possibilités : soit toutes ces propositions sont vraies, soit toutes ces propositions sont fausses.

Preuve. $i) \Rightarrow ii)$ Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite à valeurs dans $B^f(0, 1)$. Si cette suite prend la valeur 0 une infinité de fois on peut facilement extraire une sous-suite nulle et donc convergente. Sinon il existe un rang $N \geq 1$ tel que pour $n \geq N$, x_n est non nul et on peut définir $y_n := \frac{x_n}{\|x_n\|}$. La suite $(y_n)_{n \geq N}$ est à valeurs dans la sphère unité et par i) il existe une sous-suite $(y_{\phi(n)})_{n \geq 0}$ convergeant vers $y \in S(0, 1)$. De plus, comme $[0, 1]$ est compact d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de la suite $(\|x_{\phi(n)}\|)$ une sous-suite $(\|x_{\phi \circ \psi(n)}\|)$ convergeant vers $\lambda \in [0, 1]$. On obtient alors que la sous-suite de terme général $x_{\phi \circ \psi(n)} = \|x_{\phi \circ \psi(n)}\| y_{x_{\phi \circ \psi(n)}}$ converge vers λy .

$ii) \Rightarrow iii)$ Facile une fois remarqué que pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, $B^f(x, r) = x + rB^f(0, 1)$. Ainsi toute suite à valeurs dans $B^f(x, r)$ s'écrit $(x + r x_n)$ où (x_n) est une suite à valeurs dans $B^f(0, 1)$ et qui admet donc une valeur d'adhérence. On conclut alors facilement.

$iii) \Rightarrow iv)$ Soit F une partie fermée bornée et (x_n) une suite à valeurs dans F . Comme F est bornée il existe $M > 0$ tel que $F \subset B^f(0, M)$ qui est compact par iii). On conclut alors avec la Proposition 2.1.4.

$iv) \Rightarrow i)$ est évident puisque la sphère unité est fermée et bornée. $\square$

Nous allons maintenant voir que ces assertions sont toutes vraies dans un espace vectoriel normé de dimension finie et toutes fausses dans un espace de dimension infinie. Commençons par la dimension finie :

Théorème 2.3.2. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $E \subset X$ une partie de X . Alors E est compacte si et seulement si E est fermée bornée. Plus généralement les 4 points du Théorème 2.3.1 sont vrais.

Preuve. $\Rightarrow$ On a déjà vu dans la Proposition 2.1.4-i) qu'une partie compacte est aussi fermée et bornée. Cette implication est donc vraie dans n'importe quel espace métrique et n'a rien à voir avec le cadre des espaces vectoriels normés ni avec la dimension finie !

$\Leftarrow$ C'est une conséquence du théorème de Bolzano-Weierstrass (voir Corollaire 1.10.25) que l'on peut utiliser car X est un espace vectoriel normé de dimension finie. Ainsi si $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite à valeurs dans E elle est bornée et admet donc une valeur d'adhérence qui de plus appartient à E puisque cet ensemble est fermé. $\square$

Il nous reste maintenant à montrer la réciproque i.e. qu'un espace vectoriel normé où tous les fermés et bornés sont compacts est nécessairement de dimension finie, i.e. les 4 points du Théorème 2.3.1 sont faux dans un espace de dimension infinie. On obtient alors le célèbre théorème suivant :

Théorème 2.3.3 (Théorème de compacité de Riesz). Un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$ est de dimension finie si et seulement si la boule unité fermée est compacte. Ou encore : si et seulement si l'un des 4 points du Théorème 2.3.1 est vrai.

Preuve. $\Rightarrow$ On vient de voir cette implication au Théorème 2.3.2.

$\Leftarrow$ On suppose que la boule unité fermée est compacte et on montre que X est de dimension finie.

Étape 1. Montrons que si $B^f(0, 1)$ est compacte, on peut la recouvrir par un nombre fini de boules ouvertes de rayon $1/2$. C'est-à-dire qu'il existe $k \geq 1$ et $x_1, \dots, x_k$ dans $B^f(0, 1)$ tels que

$$B^f(0, 1) \subset \bigcup_{i=1}^k B(x_i, 1/2).$$

En effet, on prend x_1 dans $B^f(0, 1)$. Si $B(x_1, 1/2)$ ne recouvre pas $B^f(0, 1)$, on prend $x_2 \in B^f(0, 1) \setminus B(x_1, 1/2)$. Si $B(x_1, 1/2) \cup B(x_2, 1/2)$ ne recouvre pas $B^f(0, 1)$, on prend $x_3 \in B^f(0, 1) \setminus (B(x_1, 1/2) \cup B(x_2, 1/2))$... Et on continue ainsi tant que $\bigcup_{i=1}^n B(x_i, 1/2)$ ne recouvre pas $B^f(0, 1)$. Si après n telles étapes on obtient $\bigcup_{i=1}^n B(x_i, 1/2)$ recouvre $B^f(0, 1)$ on tient notre recouvrement. Sinon on peut construire une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ telle que $\|x_i - x_j\| \geq 1/2$ si $i \neq j$ et une telle suite ne peut admettre de valeur d'adhérence. Ceci contredit la compacité de $B^f(0, 1)$. On en déduit que la procédure s'arrête bien après un nombre fini d'étapes.

Ce qu'on a prouvé dans cet étape 1 n'est pas spécifique au cadre des espaces vectoriels normés : pour tout compact K et tout $\varepsilon > 0$, on peut être recouvrir K par un nombre fini de boules de rayon ε . Cette propriété se nomme "précompacité".

Étape 2. Supposons par l'absurde que X soit de dimension infinie. Notons $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$ le sous-espace vectoriel de X engendré par $x_1, \dots, x_k$. Comme F est de dimension finie, $F \neq X$ et il existe $x \in X \setminus F$.

On note $r := d(x, F) = \inf\{\|x - u\|, u \in F\}$. On remarque tout d'abord que $r > 0$ puisque $d(x, F) = 0$ impliquerait que $x \in \overline{F} = F$ car F est un sous-espace vectoriel de dimension finie et est donc fermé (Corollaire 1.10.26-iii)). De plus cette distance est atteinte i.e. il existe $y \in F$ tel que $\|x - y\| = d(x, F)$: en effet, soit $(y_n)_{n \geq 0} \in F$ une suite minimisante pour $d(x, F)$, i.e. telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - y_n\| = r$, alors pour n grand $y_n \in B^f(x, 2r) \cap F$. Comme $B^f(x, 2r) \cap F$ est fermé borné dans F de dimension finie, $B^f(x, 2r) \cap F$ est compact et $(y_n)_{n \geq 0}$ admet donc une valeur d'adhérence $y \in F$. Comme $\|x - \cdot\|$ est continue on obtient bien $\|x - y\| = r$.

Notons $z := \frac{x-y}{r}$. Grâce à cette renormalisation on a $z \in B^f(0, 1)$ mais on va montrer que z est à distance supérieure à 1 de tous les x_i , $i = 1, \dots, k$ ce qui contredit ce qu'on a prouvé à l'étape 1. Plus généralement on va montrer que z est à distance supérieures à 1 de n'importe quel point de F .

En effet pour tout $u \in F$ on a $y + ru \in F$ et donc

$$\|z - u\| = \left\| \frac{x - y}{r} - u \right\| = \frac{1}{r} \|x - (y + ru)\| \geq \frac{d(x, F)}{r} = 1.$$

En particulier, pour tout $i = 1, \dots, k$ on a $\|z - x_i\| \geq 1$ et on tient notre contradiction. □

Remarque 2.3.4. Deux exemples de boules unité fermé en dimension infinie.

- Dans $(\ell^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, (voir Exemple 1.10.8) la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ avec 1 en position n appartient à la boule unité fermée et n'a pas de sous-suite convergente car $d(u_n, u_m) = 1$ si $n \neq m$.
- Dans $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, la suite de fonctions $u_n(x) = x^n$ appartient à la boule unité fermée et n'a pas de sous-suite convergente dans $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Sa limite simple (mais pas uniforme) est la fonction $u(x) = 0$ si $x \in [0, 1[$, $u(1) = 1$ et n'appartient pas à $C([0, 1], \mathbb{R})$.

3 Connexité

Pour ce chapitre il est essentiel de bien réviser la notion de topologie induite que nous avons vue au Chapitre 1. On relira et s'assurera de bien comprendre en particulier la Proposition 1.9.1 que l'on utilisera régulièrement dans ce chapitre.

3.1 Définition et premières propriétés

On cherche à donner un sens précis à l'idée qu'un espace métrique est d'un seul tenant. C'est la notion de connexité qui joue ce rôle.

Définition 3.1.1. *Un espace métrique (X, d) est **connexe** si on ne peut pas l'écrire comme $X = O_1 \cup O_2$ où $O_1, O_2 \subset X$ sont deux parties non vides, disjointes et ouvertes.*

*Une partie E de (X, d) est **connexe** si (E, d_E) est un espace métrique connexe.*

Remarque 3.1.2. La connexité d'une partie E est une propriété intrinsèque. i.e. elle ne dépend que de l'espace métrique (E, d_E) et non de l'espace métrique ambiant (X, d) .

Exemple 3.1.3. — L'ensemble vide $\emptyset$ est connexe.

- Dans un espace métrique (X, d) , tout singleton est connexe. En effet, les seuls ouverts pour la topologie induite sur $\{x\}$ sont $\{\{x\}, \emptyset\}$.
- Dans un espace métrique (X, d) , si $x \neq y \in X$ alors $\{x\} \cup \{y\}$ n'est pas connexe car $\{x\}$ et $\{y\}$ sont des ouverts non vides disjointes dont l'union est X .
- Dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ l'ensemble $E = [0, 1] \cup [2, 3]$ n'est pas connexe alors que $E =]0, 1]$ est connexe.
- $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ est connexe mais $(\mathbb{Q}, | \cdot |)$ ne l'est pas. En effet $\mathbb{Q} = (] - \infty, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q}) \cup (] \sqrt{2}, +\infty[\cap \mathbb{Q})$.
- Soit (X, d) un espace métrique où d désigne la métrique discrète. X est connexe si et seulement si $X = \{x\}$. En effet, dans (X, d) , toute partie est ouverte et si X contient plus que un point $x \in X$, on peut écrire $X = \{x\} \cup \{x\}^c$.

On donne maintenant des définitions équivalentes de la connexité.

Théorème 3.1.4. *Soit (X, d) un espace métrique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- i) X est connexe.
- ii) On ne peut pas écrire X comme $X = F_1 \cup F_2$ où $F_1, F_2 \subset X$ sont deux parties non vides, disjointes et fermées.
- iii) Les seules parties à la fois ouvertes et fermées dans X sont $\emptyset$ et X .
- iv) Toute application $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ de (X, d) dans $(\{0, 1\}, | \cdot |)$ continue est constante.

Preuve. non ii) $\Rightarrow$ non i) Soit $X = F_1 \cup F_2$ où $F_1, F_2 \subset X$ sont non vides, disjointes et fermées. Alors $F_1^c = O_2$ et $F_2^c = O_1$ sont deux parties non vides, disjointes et ouvertes telles que $X = O_1 \cup O_2$ et X n'est pas connexe.

non iii) $\Rightarrow$ non ii) Si $E \subset X$ est une partie ouverte et fermée telle que $E \neq \emptyset$ et $E \neq X$ alors $X = E \cup E^c$, où E et E^c sont deux parties non vides, disjointes et fermées.

iii) $\Rightarrow$ iv) On remarque que dans $(\{0, 1\}, | \cdot |)$, $\{0\}$ et $\{1\}$ sont ouverts et fermés. Comme $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ est continue $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$ sont ouverts et fermés dans (X, d) donc égaux à X ou à $\emptyset$. Comme $X = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\})$, on en déduit qu'un des deux ensembles est vide et l'autre est X . Donc f est constante.

non i) $\Rightarrow$ non iv) Soient O_1 et O_2 deux ouverts de E disjointes et non vides tels que $X = O_1 \cup O_2$. On définit $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ en posant $f = 0$ sur O_1 et $f = 1$ sur O_2 . On vérifie alors que f est continue car l'image réciproque de tout ouvert de $(\{0, 1\}, | \cdot |)$ (i.e. $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$) est un ouvert de (X, d) et f n'est pas constante.

□

Exemple 3.1.5. L'ensemble $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ est connexe. En effet supposons que $\mathbb{R} = F_1 \cup F_2$ où $F_1, F_2 \subset X$ sont deux parties fermées non vides. On va montrer qu'elles s'intersectent. Soit $x \in F_1$ et $y \in F_2$ et on suppose $x < y$. On introduit

$$z = \sup(F_1 \cap [x, y])$$

qui est bien défini comme supremum d'une partie de $\mathbb{R}$ non vide et bornée. Alors $z \in F_1$ car F_1 est fermé. Si $z = y$ on a fini. Sinon $z < y$ et on note que $]z, y] \subset F_2$ et comme F_2 est fermé, $z \in F_2$.

Proposition 3.1.6. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ une application continue. Si (X, d_X) est connexe alors $(f(X), d_Y)$ est connexe.

Preuve. Soit $g : f(X) \rightarrow \{0, 1\}$ une application continue. Alors l'application composée $g \circ f : X \rightarrow \{0, 1\}$ est continue et donc constante puisque X est connexe. On en déduit que g est constante. $\square$

Corollaire 3.1.7. Tout intervalle ouvert non vide de $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ est connexe.

Preuve. On a déjà vu à l'Exemple 3.1.5 que $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ est connexe. Or tout intervalle non vide ouvert est homéomorphe à $\mathbb{R}$ donc est également connexe (par exemple $x \rightarrow x/[(x-1)(x+1)]$ est un homéomorphisme entre $] -1, 1[$ et $\mathbb{R}$ et on peut le modifier facilement si on veut considérer un autre intervalle ouvert). $\square$

Proposition 3.1.8. Soit (X, d) un espace métrique et $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de parties connexes d'intersection non vide deux à deux. Alors $\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ est connexe.

Preuve. Une application continue $f : \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha \rightarrow \{0, 1\}$ est constante sur chacun des E_α donc sur $\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ puisque les E_α , $\alpha \in A$ s'intersectent deux à deux. $\square$

On pourrait en fait affaiblir l'hypothèse en laissant inchangée la démonstration en supposant seulement : pour tout $\alpha, \beta \in A$ il existe une suite d'indices $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n = \beta$ dans A telle que pour tout $i = 1, \dots, n-1$, $E_{\alpha_i} \cap E_{\alpha_{i+1}} \neq \emptyset$.

Remarque 3.1.9. Une intersection de parties connexes n'est pas connexe en général. Par exemple la partie supérieure du cercle trigonométrique et la partie inférieure sont tous deux connexes mais leur intersection $\{(-1, 0), (1, 0)\}$ ne l'est pas.

Même une intersection décroissante de connexes n'est pas connexe en général : par exemple si on considère les bandes connexes de $\mathbb{R}^2$ définie pour tout $n \geq 1$ par $B_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1/n\} \setminus \{(0, 0)\}$ alors leur intersection est l'axe des ordonnées privé de l'origine qui n'est pas connexe.

Lemme 3.1.10. Soit E une partie connexe de (X, d) espace métrique et $E \subset B \subset \bar{E}$. Alors B est une partie connexe. En particulier, $\bar{E}$ est une partie connexe.

Preuve. Soit $f : B \rightarrow \{0, 1\}$ continue donc $f|_E : E \rightarrow \{0, 1\}$ est continue et, comme E connexe, elle est constante. E étant dense dans B , on obtient que f est constante aussi sur B . En effet si $x \in B$ alors il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans E qui converge vers x . Comme f est continue, la suite $(f(x_n))_{n \geq 0}$ converge vers $f(x)$. Mais cette suite est constante donc sa limite est cette même constante. $\square$

On en déduit finalement

Proposition 3.1.11. Dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$, E est une partie connexe si et seulement si E est un intervalle.

Preuve. $\Rightarrow$ Montrons que si E est un connexe alors E est un intervalle. En effet, si E est vide ou E est un singleton alors E est un intervalle. Sinon soient $x < y \in E$ et supposons par contradiction qu'il existe $x < z < y, z \notin E$. Alors $O_1 :=]-\infty, z[\cap E$ et $O_2 :=]z, +\infty[\cap E$ sont deux ouverts de E , non vides et disjoints tels que $E = O_1 \cup O_2$.

$\Leftarrow$ Si I est vide ou réduit à un singleton on a déjà fait la preuve. Sinon on note que tout intervalle I vérifie $\overset{\circ}{I}$ est un intervalle ouvert donc connexe d'après le Corollaire 3.1.7. De plus tout intervalle I qui contient au moins deux points vérifie $\overset{\circ}{I} \subset I \subset \bar{\overset{\circ}{I}}$ et le Lemme 3.1.10 permet de conclure. $\square$

Corollaire 3.1.12. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors l'image d'un intervalle par f est un intervalle.

Preuve. C'est une conséquence des propositions 3.1.6 et 3.1.11. On notera qu'on vient de prouver à nouveau le théorème des valeurs intermédiaires! $\square$

Etudions maintenant la connexité dans un espace vectoriel normé.

Définition 3.1.13. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Une partie E de X est dite **convexe** si pour tout $x, y \in E$ et tout $t \in [0, 1]$,

$$(1 - t)x + ty \in E$$

Proposition 3.1.14. Toute partie convexe d'un espace vectoriel normé est connexe. En particulier, un espace vectoriel normé est connexe.

Preuve. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel et E une partie convexe de X . Soit $f : E \rightarrow \{0, 1\}$ une fonction continue. Pour tout $x, y \in E$, la courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$ définie par $\gamma(t) := (1 - t)x + ty$ est continue. Donc, $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ est continue et comme $[0, 1]$ est connexe elle est forcément constante. Mais alors $f(x) = f(\gamma(0)) = f(\gamma(1)) = f(y)$, donc f est aussi constante. $\square$

Remarque 3.1.15. En particulier tout boule unité d'un espace vectoriel normé est connexe car convexe. C'est notable car dans un espace métrique on peut avoir des boules qui ne sont pas connexes. Exemple : la boule $B(0, 2)$ dans $\mathbb{Z}$ muni de la métrique de la valeur absolue est égale à $\{-1, 0, 1\}$ qui n'est pas connexe.

3.2 Connexité par arcs

On introduit maintenant une propriété **plus restrictive** que la connexité :

Définition 3.2.1. Soit (X, d) un espace métrique et $x, y \in X$. On appelle **arc** ou **chemin** une application continue $\gamma : ([0, 1], |\cdot|) \rightarrow (X, d)$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Remarque 3.2.2. Pour $x, y \in X$ la relation « $x \mathcal{R} y$ » si et seulement si “il existe un arc de x à y ” est une relation d'équivalence (i.e. symétrique réflexive transitive).

Définition 3.2.3. Un espace métrique (X, d) est **connexe par arcs** si, pour tout $x, y \in X$, il existe un arc de x à y . Une partie $E \subset X$ est **connexe par arcs** si (E, d_E) est connexe par arcs autrement dit si pour tout $x, y \in E$, il existe un arc de x à y **à valeurs dans E** (qui “reste” dans E).

Exemple 3.2.4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors

$$\text{graph}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

est connexe par arcs. En effet pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ le chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow \text{graph}(f)$ défini par $\gamma(t) = ((1 - t)x + ty, f((1 - t)x + ty))$ est un arc de $(x, f(x))$ à $(y, f(y))$ puisque chaque fonction coordonnée est continue.

Théorème 3.2.5. Si (X, d) est un espace métrique connexe par arcs, alors il est connexe.

Preuve. On fixe $x \in X$. Comme X est connexe par arcs, pour tout $y \in X$ il existe $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. On définit l'image de ce chemin dans X , $E_y = \gamma([0, 1])$ et on note qu'il s'agit d'un connexe car image d'un connexe par une application continue. De plus pour $y, z \in X$ on a $x \in E_y \cap E_z$. On en déduit que $X = \bigcup_{y \in X} E_y$ est connexe par la Proposition 3.1.8. $\square$

Proposition 3.2.6. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ une application continue. Si (X, d_X) est connexe par arcs, alors $(f(X), d_{f(X)})$ est connexe par arcs.

Proposition 3.2.7. Soit (X, d) un espace métrique et $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de parties connexes par arcs dont les intersections deux à deux sont non vides. Alors, $\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ est connexe par arcs.

Remarque 3.2.8. Un espace topologique connexe n'est pas forcément connexe par arcs. Par exemple : l'adhérence du graphe de $f : x \in]0, 1] \rightarrow \sin(1/x) \in \mathbb{R}$,

$$\text{Graph}(f) := \{(x, \sin 1/x) \mid 0 < x \leq 1\}$$

est $\text{Graph}(f) \cup (\{0\} \times [-1, 1])$. Il s'agit d'un connexe (comme adhérence d'un connexe), mais pas d'un connexe par arcs. Supposons en effet par l'absurde qu'on puisse trouver un arc γ dans $\overline{\text{Graph}(f)}$ tel que $\gamma(0) = (0, 0)$ et $\gamma(1) = (1, f(1))$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on note $\gamma(t) = (a_t, b_t)$. On note $T = \sup\{t \geq 0, a_t = 0\}$. Si $T = 0$ on a $a_T = 0$ et c'est encore vrai par continuité à gauche dans le cas où $T > 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires il existe une suite $(t_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans $[T, 1]$ telle que $a_{t_n} = (\pi/2 + 2n\pi)^{-1}$ pour tout $n \geq 0$ et une suite $(s_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans $[T, 1]$ telle que $a_{s_n} = (-\pi/2 + 2n\pi)^{-1}$ pour tout $n \geq 1$. Pour $t > T$ on a $\gamma(t) \in \text{Graph}(f)$ et donc $b_t = f(a_t)$. On a donc $(b_{t_n})_{n \geq 0}$ qui est constante et converge vers 1 et de même $(b_{s_n})_{n \geq 0}$ qui converge vers -1 ce qui contredit la continuité de γ en T .

On note au passage que l'adhérence d'un connexe par arc n'est pas toujours connexe par arc.

On considère maintenant la connexité par arcs dans un espace vectoriel normé.

Proposition 3.2.9. Toute partie convexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs. En particulier, un espace vectoriel normé est connexe par arcs.

Preuve. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ et E une partie de X convexe. Pour tout $x, y \in E$, la courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$ définie par $\gamma(t) := (1-t)x + ty$ est continue, $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ et $\gamma([0, 1]) \subset E$. $\square$

Remarque 3.2.10. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. La boule unité est convexe, donc connexe par arcs par la proposition précédente (on a déjà vu que elle est connexe).

On voit maintenant une réciproque partielle du Théorème 3.2.5 :

Théorème 3.2.11. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $E \subset X$ une partie ouverte connexe de X . Alors E est connexe par arcs.

Preuve. Si $E = \emptyset$, on n'a rien à prouver. Sinon on considère $x \in E$ et on pose $A := \{y \in E \mid y \mathcal{R}_E x\}$ (où $y \mathcal{R}_E x$ signifie qu'il existe un arc reliant y à x dans E). On veut montrer que $A = E$. Pour cela on note tout d'abord que A n'est pas vide car $x \in A$. On va ensuite montrer que A est ouvert et fermé dans E et, comme E connexe, cela nous permettra de conclure que $A = E$.

A est ouvert : Soit $y \in A$. Comme E est ouvert il existe $r > 0$ tel que $B(y, r) \subset E$. Pour tout $z \in B$ on a $z \mathcal{R}_E y$ car $B(y, r)$ est convexe et inclus dans E donc connexe par arcs. Comme de plus $y \mathcal{R}_E x$ on en déduit $z \mathcal{R}_E x$ et donc $B(y, r) \subset A$.

A est fermé : Soit $y \in E$ adhérent à A dans (E, d_E) . Comme E est un ouvert il existe $r > 0$ tel que $B(y, r) \subset E$. De plus comme y est dans l'adhérence de A pour (E, d_E) , il existe $z \in B(y, r) \cap A \cap E$. On a donc : $z \mathcal{R}_E x$ car $z \in A$ et aussi $z \mathcal{R}_E y$ car $B(y, r)$ est convexe et inclus dans E . On en déduit $y \mathcal{R}_E x$ c'est-à-dire $y \in A$. $\square$

3.3 Composantes connexes

Lemme 3.3.1. *On définit la relation $\mathcal{R}$ par : « pour $x, y \in X$, $x\mathcal{R}y$ si et seulement s'il existe une partie E de X connexe contenant x et y » La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*

Preuve. La symétrie est évidente. La réflexivité est une conséquence du fait que pour tout $x \in X$, la partie $\{x\}$ est connexe. Il nous reste la transitivité. Soient $x, y \in X$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Il existe donc une partie connexe A contenant x et y et une partie connexe B contenant y et z . Comme les deux parties contiennent y , $A \cap B \neq \emptyset$ et la partie $A \cup B$ est donc connexe. on obtient donc $x\mathcal{R}z$. $\square$

Définition 3.3.2. *Soit $x \in X$. On appelle **composante connexe** de x la classe d'équivalence de x pour $\mathcal{R}$ et on la note C_x . On a donc par définition $C_x = \{y \in X \text{ t.q. } y\mathcal{R}x\}$.*

Remarque 3.3.3. On rappelle que les classes d'équivalence d'une relation d'équivalence forme une partition. C'est en particulier les cas pour les composantes connexes de X . On rappelle qu'un ensemble de parties de X forme une **partition** de X si :

- aucune de ces parties n'est vide ;
- leur union est égale à X ;
- elles sont deux à deux disjointes.

Exemple 3.3.4. Les éléments de $\mathbb{Z}$ sont ses composantes connexes puisque les seules parties connexes de $\mathbb{Z}$ sont les singletons.

Proposition 3.3.5. *Pour tout $x \in X$, soit $\{D_\alpha\}_{\alpha \in A}$ la famille des parties connexes de X contenant x . Alors la composante connexe de x est*

$$C_x = \bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha.$$

De plus, C_x est une partie connexe et fermée. C'est la plus grande (au sens de l'inclusion) partie connexe contenant x .

Preuve. Si $y \in C_x$, alors $x\mathcal{R}y$, i.e. il existe une partie connexe D contenant x et y , d'où l'inclusion de $C_x \subset \bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha$.

Réciproquement, si $y \in \bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha$, alors il existe une partie connexe contenant x et y , d'où $x\mathcal{R}y$ et y appartient à C_x .

La partie C_x est donc connexe en tant qu'union de parties connexes d'intersection non vide (voir Proposition 3.1.8). Elle est fermée car $\overline{C_x}$ est connexe et contient x et est donc contenue dans C_x . $\square$

Remarque 3.3.6. 1. Si C_x intersecte un connexe C , alors $C \subset C_x$ puisque $C_x \cup C$ est encore un connexe qui contient x . Autrement dit, C_x avale tous les connexes qu'elle touche.

2. L'espace X est connexe si et seulement s'il n'a qu'une composante connexe.

Lemme 3.3.7. *Soit $E \subset X$ une partie non vide, ouverte, fermée et connexe. Alors, E est une composante connexe de X .*

Preuve. Soit $x \in E$. Montrons que $E = C_x$. On note tout d'abord que $E \subset C_x$, car E est connexe et C_x est la plus grande partie connexe contenant x . Réciproquement, $C_x \cap E$ est non vide, ouvert et fermé dans (C_x, d_{C_x}) qui est connexe. On en déduit que $C_x \cap E = C_x$ et donc $C_x \subset E$. $\square$

Attention : La réciproque de ce lemme est fausse : en général une composante connexe n'est pas ouverte. Par exemple les composantes connexes de $\mathbb{Q}$ sont des singletons, qui ne sont pas ouverts dans $\mathbb{Q}$.

Exemple 3.3.8. Les composantes connexes de $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ sont $[0, 1]$ et $[2, 3]$. En effet, $[0, 1]$ et $[2, 3]$ sont des parties connexes de X (car ceux sont des intervalles) et X n'est pas connexe (car $[0, 1]$ et $[2, 3]$ sont des ouverts de X disjoints non vides qui recouvrent X). Donc si $x \in [0, 1]$ alors C_x contient $[0, 1]$ d'après la Proposition 3.3.5. De plus si $y \in [2, 3]$ alors $y \notin C_x$ sinon $C_x = X$ d'après la Remarque 3.3.6 ce qui est absurde.

Que dire de plus sur les composantes connexes dans le cas d'un espace vectoriel normé ?

Proposition 3.3.9. *Si E est une partie ouverte d'un espace vectoriel normé $(X, \| \cdot \|)$, les composantes connexes de E sont ouvertes et fermées dans E .*

Preuve. Soit $x \in E$ et C_x sa composante connexe dans E . Il suffit de montrer qu'elle est ouverte (car on sait déjà qu'elle est fermée dans E par la Proposition 3.3.5). Soit $y \in C_x$ et $\varepsilon > 0$ tel que $B(y, \varepsilon) \subset E$. La boule $B(y, \varepsilon)$ est connexe dans E (car convexe dans un espace vectoriel normé) et intersecte C_x , donc $B(y, \varepsilon) \subset C_x$. $\square$

4 Complétude

Dans ce chapitre on introduit la notion de complétude. Contrairement à la compacité ou à la connexité, qui sont des notions topologiques i.e. qui ne dépendent de la métrique qu'à travers la topologie qu'elle définit, la complétude est une notion réellement métrique. Attention donc : deux métriques produisant la même topologie peuvent l'une rendre l'espace complet l'autre l'espace non complet.

4.1 Définition et généralités

Dans tout ce chapitre (X, d) désigne un espace métrique.

Définition 4.1.1. Une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans (X, d) est dite **de Cauchy** lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \geq N, d(x_n, x_p) < \varepsilon.$$

On a les propriétés suivantes

Théorème 4.1.2. *i) Une suite de Cauchy $(x_n)_{n \geq 0}$ est bornée, i.e. l'ensemble $\{x_n \mid n \geq 0\}$ est borné.
ii) Une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy si et seulement si $\text{diam}\{x_k \mid k \geq n\}$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.
iii) Une sous-suite d'une suite de Cauchy est une suite de Cauchy.
iv) Une suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence converge.
v) Toute suite convergente est de Cauchy.*

Preuve. i) Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy. On prend $\varepsilon = 1$ dans la définition et il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p \geq 0, d(x_{N+p}, x_N) < 1.$$

On définit

$$M := \max\{1, d(x_0, x_N), \dots, d(x_{N-1}, x_N)\}$$

et on obtient que $\{x_n, n \geq 0\} \subset B(x_N, M)$ est bornée.

ii) $\Rightarrow$ Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, p \geq N$, $d(x_n, x_p) < \varepsilon$. En particulier, pour tout $i \geq N$,

$$\text{diam}\{x_k \mid k \geq i\} \leq \text{diam}\{x_k \mid k \geq N\} \leq \varepsilon.$$

$\Leftarrow$ Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \geq 0$ tel que $\text{diam}\{x_k \mid k \geq N\} < \varepsilon$ et donc

$$\sup\{d(x_k, x_n) \mid k, n \geq N\} < \varepsilon$$

ce qui dit bien que la suite est de Cauchy.

iii) Facile !

iv) Soit $(x_{\phi(n)})_{n \geq 0}$ une sous-suite convergeant vers $\ell \in X$. On va montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers ℓ . On se donne $\varepsilon > 0$. Il existe donc $N_1 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $d(x_{\phi(n)}, \ell) < \varepsilon$. De plus comme $(x_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy il existe aussi $N_2 \geq 0$ tel que pour tout $n, p \geq N_2$, $d(x_n, x_p) < \varepsilon$. On choisit K assez grand pour que $N = \phi(K) \geq \max(N_2, \phi(N_1))$ et on obtient que pour tout $n \geq N$

$$d(x_n, \ell) \leq d(x_n, x_{\phi(K)}) + d(x_{\phi(K)}, \ell) < 2\varepsilon.$$

v) Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite convergeant vers $\ell \in X$. Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que pour tout $n \geq N$, $d(x_n, \ell) < \varepsilon$. On obtient alors que pour tout $n, p \geq N$

$$d(x_n, x_p) \leq d(x_n, \ell) + d(x_p, \ell) < \varepsilon.$$

□

Exemple 4.1.3. Exemples de suites de Cauchy non convergentes : dans $([0, 1[, | \cdot |)$ la suite $(x_n) = (1 - \frac{1}{n})$ est de Cauchy mais elle n'est pas convergente car $1 \notin [0, 1[$. Dans $(\mathbb{Q}, | \cdot |)$, n'importe quelle suite de rationnels qui converge vers un irrationnel est de Cauchy (parce que elle admet une limite finie dans $\mathbb{R}$) mais elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$, car la limite n'y appartient pas.

Proposition 4.1.4. Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ une application uniformément continue. Si $(x_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans X alors $(f(x_n))_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans Y .

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in X, d(x, y) < \eta \implies \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Comme $(x_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy il existe N tel que pour tout $n, p \geq N$, $d(x_n, x_p) < \eta$ et donc aussi $\delta(f(x_n), f(x_p)) < \varepsilon$. $\square$

C'est faux si on suppose seulement f continue. Par exemple $f : x \in]0, 1[\mapsto 1/x \in \mathbb{R}^+$ vérifie que $(1/n)_{n \geq 0}$ est bien de Cauchy dans l'espace de départ mais $(f(1/n))_{n \geq 0}$ n'est pas de Cauchy dans l'espace d'arrivée.

Définition 4.1.5. On dit qu'un espace métrique (X, d) est **complet** si toute suite de Cauchy à valeurs dans X est convergente. Une partie E de X est **complète** si (E, d_E) est complet.

Exemple 4.1.6. $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ est complet. $([0, 1[, | \cdot |)$ et $(\mathbb{Q}, | \cdot |)$ ne sont pas complets.

Proposition 4.1.7. Un espace métrique compact est complet.

Preuve. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy à valeur dans un espace métrique compact. Elle admet donc une valeur d'adhérence et, par le Théorème 4.1.2, elle converge. $\square$

Théorème 4.1.8. Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Preuve. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy à valeurs dans un evn de dimension finie. Comme c'est une suite de Cauchy, elle est bornée. Comme on est en dimension finie on peut utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass et on en déduit que $(x_n)_{n \geq 0}$ admet une sous-suite convergente. Par le Théorème 4.1.2 on en déduit que cette suite converge. $\square$

Exemple 4.1.9. L'espace $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$ est complet.

Remarque 4.1.10. La notion de suite de Cauchy dans un espace complet permet de montrer qu'une suite converge sans connaître la limite à priori. C'est l'outil fondamental de beaucoup de résultats d'existence.

Proposition 4.1.11. Soit (X, d) un espace métrique et E une partie non vide de X .

- i) Si E est complet, alors E est fermée dans X .
- ii) Si X est complet et E est fermée dans (X, d) alors E est complet.

Preuve. i) Soit E une partie complète. On considère une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans E et convergeant vers $x \in X$. La suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est en particulier de Cauchy dans (X, d) et donc aussi dans (E, d_E) . On en déduit qu'elle converge dans E complet et donc $x \in E$.

- ii) On suppose que X est complet et E est fermée dans X . Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy dans (E, d_E) . Cette suite est de Cauchy aussi dans (X, d) qui est complet et possède donc une limite dans X . Comme E est fermée cette limite est dans E . $\square$

Corollaire 4.1.12. Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les parties complètes sont les parties fermées.

On retrouve aussi un résultat déjà connu :

Corollaire 4.1.13. *Dans un espace vectoriel normé quelconque, tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé.*

Preuve. Un sous-espace vectoriel de dimension finie est complet pour la norme induite grâce au Théorème 4.1.8 et donc complet pour n'importe quelle norme puisque toutes les normes sont équivalentes dans un evn de dimension finie. $\square$

4.2 Espaces de Banach.

Définition 4.2.1. *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.*

Exemple 4.2.2. Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach (Théorème 4.1.8).

Corollaire 4.2.3. *Tout sous-espace vectoriel **fermé** d'un espace de Banach est lui-même un espace de Banach.*

Preuve. C'est une conséquence du Théorème 4.1.11-ii) $\square$

Définition 4.2.4. *Étant donné une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans un espace vectoriel X on appelle série de terme général x_n la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ où pour tout $n \geq 0$, $S_n = \sum_{k=0}^n x_k$. La suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est appelée suite des sommes partielles.*

Définition 4.2.5. *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit que la série de terme général x_n **converge** vers $x \in X$ si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \geq 0}$ **converge** vers x dans $(X, \|\cdot\|)$. On note $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ la limite de la série. On dit que $\sum x_n$ satisfait la **condition de Cauchy** lorsque $(S_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy.*

Définition 4.2.6. *On dit qu'une série $\sum x_n$ d'un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$ **converge normalement** vers $x \in X$ si la série $\sum \|x_n\|$ converge dans $\mathbb{R}$. Cela revient à dire que $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$.*

Le théorème suivant nous dit que dans un espace de Banach une série normalement convergente est convergente...et que la réciproque est vraie !

Théorème 4.2.7. *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors $(X, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach si et seulement si toute série normalement convergente est convergente.*

Preuve. On commence par le sens direct. On suppose donc que $(X, \|\cdot\|)$ est un Banach et on considère une série de terme générale x_n normalement convergente. On fixe $\varepsilon > 0$. Comme la série $\sum \|x_n\|$ converge dans $\mathbb{R}$, elle satisfait la condition de Cauchy et il existe donc $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N, p > 0$

$$\left| \sum_{k=0}^{n+p} \|x_k\| - \sum_{k=0}^n \|x_k\| \right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon.$$

On a alors

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon.$$

La suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est donc de Cauchy dans l'espace de Banach X et donc elle converge.

On passe à la réciproque. On suppose que toute série normalement convergente de X est convergente. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy dans X . On veut montrer que cette suite converge. Pour cela, il suffit de montrer qu'elle admet une valeur d'adhérence (Théorème 4.1.2-iv)). La

suite $(x_n)_{n \geq 0}$ étant de Cauchy, on peut construire récursivement une suite croissante d'entiers $\phi(1) < \phi(2) < \dots < \phi(p) < \dots$ tels que, pour tout $p \geq 0$ et pour tout $n > \phi(p)$, on ait

$$\|x_n - x_{\phi(p)}\| \leq \frac{1}{2^p}.$$

En particulier, on a $\|x_{\phi(p+1)} - x_{\phi(p)}\| \leq \frac{1}{2^p}$.

La série de terme général

$$y_0 := x_{\phi(1)}, \quad y_p := x_{\phi(p+1)} - x_{\phi(p)}, \quad \forall p \geq 1$$

est normalement convergente car $\sum_{p=1}^{\infty} \|x_{\phi(p+1)} - x_{\phi(p)}\| \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p} < +\infty$. Elle est donc convergente et on en déduit que la suite de terme général $(x_{\phi(p)})_{p \geq 1}$ est convergente. $\square$

Théorème 4.2.8. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $\sum x_n$ une série de X normalement convergente. Alors pour toute bijection σ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, $\sum x_{\sigma(n)}$ converge vers $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

Preuve. On note $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$,

$$\left\| x - \sum_{k=0}^n x_k \right\| < \varepsilon.$$

Comme $\sum \|x_n\|$ converge vers une limite réelle il existe $N_2 \geq 0$ tel que pour tout $m \geq N_2$,

$$\sum_{k=m}^{\infty} \|x_k\| := \left| \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| - \sum_{n=0}^m \|x_n\| \right| < \varepsilon.$$

On définit $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$ puis on choisit N suffisamment grand pour que $\{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(N)\}$ contienne $\{0, 1, \dots, N_0\}$. Pour $m \geq N$ on a

$$\left\| x - \sum_{k=0}^m x_{\sigma(k)} \right\| \leq \left\| x - \sum_{k=0}^{N_0} x_k \right\| + \sum_{k=N_0}^{\infty} \|x_k\|$$

et $\left\| x - \sum_{k=0}^{N_0} x_k \right\| < \varepsilon$ car $N_0 \geq N_1$ et $\sum_{k=N_0}^{\infty} \|x_k\| < \varepsilon$ car $N_0 \geq N_2$. $\square$

Ce résultat est remarquable : on rappelle que dans $\mathbb{R}$, si une série de terme général x_n est convergente mais non absolument convergente (on dit qu'elle est semi-convergente) alors on peut réarranger ses termes pour qu'elle converge vers n'importe quel réel ou même qu'elle diverge.

Des exemples d'espace de Banach : $E = \mathcal{C}([0, 1], \|\cdot\|_{\infty})$; pour $1 \leq p \leq +\infty$, $\ell_p(\mathbb{N})$ est un Banach. En revanche $\mathcal{C}([0, 1], \|\cdot\|_1)$ n'est pas de Banach ; tout sev non fermé d'un Banach n'est pas un Banach ; $\mathbb{R}[X]$ muni de n'importe quelle norme n'est pas un Banach. Voir la feuille de TD pour la preuve de toutes ces propositions.

5 Applications linéaires continues

Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 5.0.1. Une application $f : X \rightarrow Y$ est dite **linéaire** si elle vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall x, y \in X, f(x + y) = f(x) + f(y)$;
- $\forall x \in X, \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda x) = \lambda f(x)$ (homogénéité).

Ou encore de façon plus condensée : si pour tout $x, y \in X$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$

$$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y).$$

5.1 Caractérisation de la continuité pour une application linéaire

Proposition 5.1.1 (Caractérisation fondamentale). Soit $f : X \rightarrow Y$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- i) L'application f est continue.
- ii) L'application f est continue en $0 \in X$.
- iii) L'application f est bornée sur la boule unité de X .
- iv) L'application f est bornée sur les parties bornées de X .
- v) Il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in X$

$$\|f(x)\|_Y \leq M\|x\|_X.$$

- vi) L'application f est Lipschitzienne, c'est-à-dire il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout $x_1, x_2 \in X$

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|_Y \leq M\|x_1 - x_2\|_X.$$

- vii) L'application f est uniformément continue sur X .

Preuve. Le fait que i) $\Rightarrow$ ii) est immédiat.

ii) $\Rightarrow$ iii) On remarque tout d'abord que si f est linéaire $f(0) = 0$. Comme f est continue en $0 \in X$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in X$; $\|x\|_X < \eta$ implique $\|f(x)\|_Y < 1$. Soit maintenant $x \in B_X(0, 1)$. Comme $\eta x \in B_X(0, \eta)$ on obtient $f(\eta x) \in B_Y(0, 1)$ et donc $f(x) \in B_Y(0, 1/\eta)$.

iii) $\Rightarrow$ iv) On suppose que f est bornée sur la boule unité de X . Il existe donc $M > 0$ tel que l'image de la boule unité est à valeur dans $B_Y(0, M)$. Soit A une partie bornée. Il existe donc $K > 0$ tel que $A \subset B_X(0, K)$. Par homogénéité, pour tout $x \in B_X(0, K)$, $x/K \in B_X(0, 1)$ et donc $f(x/K) \in B_Y(0, M)$ d'où $f(x) \in B_Y(0, MK)$.

iv) $\Rightarrow$ v) Comme f est bornée sur les parties bornées de X , $f(B_X^f(0, 1))$ est bornée et il existe $M \geq 0$ tel que $f(B_X^f(0, 1)) \subset B_Y(0, M)$. Pour tout $x \in X, x \neq 0$, on a

$$\left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) \right\|_Y \leq M,$$

et par linéarité et homogénéité,

$$\|f(x)\|_Y \leq M\|x\|_X.$$

v) $\Rightarrow$ vi) Il suffit d'appliquer v) à $x_1 - x_2$.

vi) $\Rightarrow$ vii) Les applications Lipschitziennes sont uniformément continues.

vi) $\Rightarrow$ i) Les applications uniformément continues sont continues

□

Théorème 5.1.2. Si $(X, \|\cdot\|_X)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie alors toute application linéaire $f : X \rightarrow Y$ est continue.

Preuve. D'après la Proposition 5.1.1, il suffit de démontrer que f est bornée sur la boule unité. Comme toutes les normes sont équivalentes en dimension finie on peut se contenter de le montrer pour la norme infinie (on a fixé une base $(e_1, \dots, e_n)$ de X). Soit $x \in B_X(0, 1)$. Ce vecteur se décompose en $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ où $|\lambda_i| < 1$ pour tout i . On a

$$\|f(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i)\|_Y = \|\sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i)\|_Y \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \|f(e_i)\|_Y < \sum_{i=1}^n \|f(e_i)\|_Y$$

On en déduit que f est bornée sur la boule unité de X . □

Quelques exemples d'applications linéaires non continues (exercices) :

1. L'application linéaire L définie sur l'espace E des polynômes muni de la norme $N : \sum_{k=1}^n a_k X^k \rightarrow \max\{|a_k|, 1 \leq k \leq n\}$ par

$$L : P = \sum_{k=1}^n a_k X^k \in E \rightarrow \sum_{k=1}^n a_k \in \mathbb{R}$$

n'est pas continue.

2. L'application identité définie sur $\mathcal{C}([0, 1])$ munie de la norme $\|\cdot\|_1$ et à valeurs dans le même espace munie de la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas non plus continue.

5.2 Espace vectoriel normé des fonctions linéaires continues

On considère ici l'espace vectoriel des fonctions linéaires continues de X dans Y , que l'on note $L_c(X, Y)$. D'après la Proposition 5.1.1 la définition suivante fait bien sens :

Définition 5.2.1. Pour toute $f \in L_c(X, Y)$ on appelle **norme subordonnée ou norme d'application linéaire** la fonction $\|f\| : L_c(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\|f\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Remarque 5.2.2. En particulier, pour tout $x \in X$

$$\|f(x)\|_Y \leq \|f\| \|x\|_X.$$

Proposition 5.2.3. Pour tout $f \in L_c(X, Y)$ on a

$$\|f\| = \sup_{x \in B_X^f(0, 1)} \|f(x)\|_Y = \sup_{x \in S_X(0, 1)} \|f(x)\|_Y.$$

Preuve. On a clairement

$$\sup_{x \in X, \|x\|_X=1} \|f(x)\|_Y \leq \sup_{x \in X, \|x\|_X \leq 1} \|f(x)\|_Y \leq \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x \in X, x \neq 0} \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) \right\|_Y \leq \sup_{x \in X, \|x\|_X=1} \|f(x)\|_Y.$$

□

On remarque par ailleurs qu'on a aussi

$$\|f\| = \sup_{x \in B_X(0, 1)} \|f(x)\|_Y$$

puisque $\sup_{x \in B_X(0,1)} \|f(x)\|_Y \leq \sup_{x \in B_X^f(0,1)} \|f(x)\|_Y$ et que par ailleurs pour tout $x \in S_X(0,1)$ et tout $\lambda \in [0,1[$, $\|\lambda x\|_X < 1$ donc par continuité de f ,

$$\|f(x)\|_Y = \lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \|f(\lambda x)\|_Y \leq \sup_{y \in B_X(0,1)} \|f(y)\|_Y$$

et

$$\sup_{x \in S_X(0,1)} \|f(x)\|_Y \leq \sup_{y \in B_X(0,1)} \|f(y)\|_Y.$$

Proposition 5.2.4. *La fonction $\| \| : L_c(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$ est une norme sur $L_c(X, Y)$.*

Preuve. 1. Positive : $\|f\| \geq 0$ pour tout $f \in L_c(X, Y)$

2. Séparation : pour tout $f \in L_c(X, Y)$, $\|f\| = 0$ si et seulement si pour tout $x \in X$, $x \neq 0$ on a

$$\frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X} = 0,$$

et donc $f(x) = 0$.

3. Homogénéité : Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a bien

$$\|\lambda f\| = \sup_{x \in X, \|x\|_X \leq 1} \|\lambda f(x)\|_Y = \sup_{x \in X, \|x\|_X \leq 1} |\lambda| \|f(x)\|_Y = |\lambda| \|f\|.$$

4. Inégalité triangulaire : Si $f, g \in L_c(X, Y)$ alors

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \sup_{x \in X, \|x\|_X \leq 1} \|f(x) + g(x)\|_Y \leq \sup_{x \in X, \|x\|_X \leq 1} \|f(x)\|_Y + \|g(x)\|_Y \\ &\leq \sup_{x \in X, \|x\|_X \leq 1} \|f(x)\|_Y + \sup_{x \in X, \|x\|_X \leq 1} \|g(x)\|_Y = \|f\| + \|g\|. \end{aligned}$$

□

Remarque 5.2.5. Si X est de dimension finie, la borne supérieure

$$\|f\| = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} \|f(x)\|_Y$$

est atteinte car la boule unité est compacte en dimension finie et la norme est continue (ça c'est vrai même en dimension infinie).

Proposition 5.2.6. *Soient $(X, \| \cdot \|_X)$, $(Y, \| \cdot \|_Y)$, $(Z, \| \cdot \|_Z)$ trois espaces vectoriels normés, $f \in L_c(X, Y)$ et $g \in L_c(Y, Z)$. Alors $g \circ f \in L_c(X, Z)$ et*

$$\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|.$$

Preuve. La composée de fonctions linéaires reste linéaire et la composée de fonctions continues est continue. De plus, pour tout $x \in X$ on a

$$\|g \circ f(x)\|_Z \leq \|g\| \|f(x)\|_Y \leq \|g\| \|f\| \|x\|_X.$$

□

Théorème 5.2.7. *Si $(Y, \| \cdot \|_Y)$ est un espace de Banach, alors $(L_c(X, Y), \| \|)$ est un espace de Banach.*

Preuve. Il faut montrer que toute suite de Cauchy dans $(L_c(X, Y), \|\cdot\|)$ est convergente. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy dans $(L_c(X, Y), \|\cdot\|)$.

Définition de la fonction limite. On montre tout d'abord la convergence simple pour définir la fonction limite. Soit $x \in X$. La suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(Y, \|\cdot\|_Y)$: en effet, fixons $\varepsilon > 0$ et considérons $N \geq 1$ assez grand pour que pour tout $n, p \geq N$, $\|f_n - f_p\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|}$. On obtient alors que pour tout $n, p \geq N$

$$\|f_n(x) - f_p(x)\|_Y \leq \|f_n - f_p\| \|x\|_X \leq \varepsilon.$$

Comme $(Y, \|\cdot\|_Y)$ est complet, on en déduit que $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain $y_x \in Y$. On définit la fonction $f : X \rightarrow Y$, par $f(x) := y_x$ pour tout $x \in X$.

Linéarité. Pour tout $x_1, x_2 \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a,

$$f(x_1 + \lambda x_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_1 + \lambda x_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_1) + \lambda f_n(x_2) = f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

Continuité. On montre que la convergence de la suite d'applications $(f_n)_{n \geq 0}$ est uniforme sur la boule unité de X . Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(f_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy, il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $n, p \geq N$ on a $\|f_n - f_p\| < \varepsilon$. On obtient ainsi que pour tout $x \in B_X^f(0, 1)$ et tout $n, p \geq N$, $\|f_n(x) - f_p(x)\|_Y < \varepsilon$. Puis en utilisant la continuité de la norme et en faisant tendre $p \rightarrow +\infty$, on obtient que pour tout $x \in B_X(0, 1)$ et tout $n \geq N$, $\|f_n(x) - f(x)\|_Y < \varepsilon$, ce qui est bien la convergence uniforme sur $B_X^f(0, 1)$. On en déduit que f est continue sur $B_X^f(0, 1)$ comme limite uniforme de fonctions continues et en particulier elle est continue en 0...et donc sur tout X en utilisant la Proposition 5.1.1.

Convergence de $(f_n)_{n \geq 0}$ vers f dans $(L_c(X, Y), \|\cdot\|)$. On a déjà montré au point précédent que $(\sup_{x \in B_X^f(0, 1)} \|f_n(x) - f(x)\|_Y)_{n \geq 0}$ convergeait vers 0 ce qui est équivalent à $(\|f_n - f\|)_{n \geq 0}$ tend vers 0. $\square$

On obtient en corollaire important le résultat suivant :

Corollaire 5.2.8. Soient $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $X' = L_c(X, \mathbb{R})$ son dual topologique, c'est-à-dire l'ensemble des application linéaires continues sur X . L'espace X' , muni de la norme $\|\cdot\|$, est un espace de Banach.

5.3 Applications bilinéaires

Soient $(X_1, \|\cdot\|_{X_1})$, $(X_2, \|\cdot\|_{X_2})$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ trois espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 5.3.1. Une application $f : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ est dite **bilinéaire** si elle est linéaire en chacune des ses variables, i.e. :

- $\forall x_1, \tilde{x}_1 \in X_1, x_2 \in X_2, f(x_1 + \tilde{x}_1, x_2) = f(x_1, x_2) + f(\tilde{x}_1, x_2)$;
- $\forall x_1 \in X_1, x_2, \tilde{x}_2 \in X_2, f(x_1, x_2 + \tilde{x}_2) = f(x_1, x_2) + f(x_1, \tilde{x}_2)$;
- $\forall x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda x_1, x_2) = \lambda f(x_1, x_2) = f(x_1, \lambda x_2)$.

La forme bilinéaire f est dite **symétrique** si $f(x, y) = f(y, x)$ pour $(x, y) \in X_1 \times X_2$.

Proposition 5.3.2 (Caractérisation fondamentale). Soit $f : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ une application bilinéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- i) L'application f est continue.
- ii) L'application f est continue en $(0, 0) \in X_1 \times X_2$.
- iii) Il existe $C \geq 0$ tel qu'on ait :

$$\|f(x_1, x_2)\|_Y \leq C \|x_1\|_{X_1} \|x_2\|_{X_2}.$$

pour tous $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$.

Preuve. Suivre la preuve de la Proposition 5.1.1. □

On considère ici l'espace vectoriel des fonctions bilinéaires continues de $X_1 \times X_2$ dans Y , dénoté par $L_c(X_1 \times X_2, Y)$. La définition suivante donne une norme pour $L_c(X_1 \times X_2, Y)$.

Définition 5.3.3. *Pour toute $f \in L_c(X_1 \times X_2, Y)$ on définit*

$$\|f\| = \|f\|_{X_1 \times X_2, Y} = \sup_{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2, x_1 \neq 0, x_2 \neq 0} \frac{\|f(x_1, x_2)\|_Y}{\|x_1\|_{X_1} \|x_2\|_{X_2}}.$$

Remarque 5.3.4. On peut tout généraliser aux applications multilinéaires !