Analyse 1

Année 2016-2017

François Simenhaus
Bureau B 640
simenhaus@ceremade.dauphine.fr

Table des matières

Chapitre 1

Axiomatique de $\mathbb{R}$

1.1 Idées sur la construction de $\mathbb{R}$

Le but de cette partie est de construire un ensemble de nombres qui corresponde à l'intuition que l'on a des points d'une droite, c'est-à-dire qui permette de mesurer la distance entre l'origine et n'importe quel point de la droite. Pour obtenir cet ensemble appelé ensemble des **réels** et noté $\mathbb{R}$, nous allons devoir considérer d'autres ensembles : les **entiers naturels** $\mathbb{N}$, les **entiers relatifs** $\mathbb{Z}$ et les **rationnels** $\mathbb{Q}$. Nous n'allons pas construire vraiment ces ensembles car cela dépasse le cadre de ce cours. Il s'agit simplement de comprendre intuitivement comment ils s'obtiennent les uns à partir des autres. Il s'agit aussi de comprendre que l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ n'est pas un ensemble satisfaisant pour décrire la droite. Le premier ensemble que l'on considère est celui des entiers naturels

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}.$$

A partir de $\mathbb{N}$ on peut construire, par symétrisation, l'ensemble des entiers relatifs en considérant un opposé pour chaque entier :

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}) = \{0, 1, 2, \cdots\} \cup \{0, -1, -2, \cdots\}.$$

A partir de $\mathbb{Z}$, on construit l'ensemble des rationnels en considérant les fractions d'entiers relatifs :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

Tous ces ensembles peuvent être munis des opérations algébriques dont vous avez l'habitude : l'addition + et la multiplication $\times$. On peut également les

munir d'une relation d'ordre $\leq$.
A ce stade, il pourrait nous sembler que le dernier ensemble considéré, $\mathbb{Q}$, est assez gros pour représenter correctement toute la droite. En fait ce n'est pas le cas et nous allons voir que $\mathbb{Q}$ a "des trous". On dit, mais ça dépasse aussi le cadre de cette présentation, que $\mathbb{Q}$ n'est pas *complet*. Voici l'exemple célèbre d'un nombre qui "manque" dans $\mathbb{Q}$:

Proposition 1. *Il n'existe pas de rationnel dont le carré est égal à 2.*

Démonstration. On considère un triangle rectangle isocèle de côté 1. Le théorème de Pythagore nous dit que le carré de la longueur r de l'hypoténuse est égal à 2. Cette longueur r est-elle rationnelle ? Nous allons raisonner par l'absurde pour prouver que ce n'est pas le cas : supposons donc qu'il existe un rationnel r positif tel que $r^2 = 2$. Par définition de $\mathbb{Q}$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tel que $r = p/q$. On peut supposer p et q positifs puisqu'ils sont de même signe et, quitte à simplifier la fraction, on peut également supposer que $pgcd(p, q) = 1$. On a $p^2 = 2q^2$ ce qui implique que p^2 est pair. On remarque ensuite que le carré d'un entier est pair si et seulement si cet entier est pair et on en déduit que p est pair. Il existe donc un entier p' tel que $p = 2p'$. On a alors $2p'^2 = q^2$ et, en répétant le même argument, on montre que q est également pair. Finalement on a prouvé que $pgcd(p, q) \geq 2$: c'est une contradiction. $\square$

Cette preuve est un peu particulière : elle utilise un argument spécifique de parité mais, en fait, il "manque beaucoup de nombres" dans $\mathbb{Q}$ et nous verrons que l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ que l'on va construire pour compléter $\mathbb{Q}$ est en fait beaucoup "plus gros" que $\mathbb{Q}$.
On admet donc l'existence d'un ensemble dit *ensemble des réels*, noté $\mathbb{R}$ et contenant $\mathbb{Q}$, vérifiant :
1. $\mathbb{R}$ est un corps (propriétés algébriques).
Cela signifie que les opérations $+$ et $\times$ satisfont pour tous réels a, b et c

- $a + b = b + a$ (commutativité de $+$)
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ (associativité de $+$)
- $a + 0 = a$ (0 est élément neutre pour $+$)
- $\exists (-a) \in \mathbb{R}$ tel que $a + (-a) = 0$ (tout élément a un opposé)

Par ailleurs

- $ab = ba$ (commutativité de $\times$)
- $a(bc) = (ab)c$ (associativité de $\times$)
- $a \times 1 = a$ (1 est élément neutre pour $\times$)
- Si $a \neq 0$ alors $\exists\ a^{-1} \in \mathbb{R}$ tel que $a(a^{-1}) = 1$ (tout élément non nul admet un inverse)

- $a(b+c) = ab + ac$ (distributivité)

2. $\mathbb{R}$ est totalement ordonné. $\mathbb{R}$ est muni d'une relation $\leq$ qui vérifie pour tous réels a, b et c

- $a \leq a$ (relation réflexive)
- Si $a \leq b$ et $b \leq a$ alors $a = b$ (relation antisymétrique)
- Si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$ (relation transitive)
- $a \leq b$ ou $b \leq a$ (l'ordre est *total*)

De plus, cet ordre est **compatible** avec les opérations sur le corps

- Si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$ (compatible avec $+$)
- Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$ alors $ab \geq 0$ (compatible avec $\times$)

3. $\mathbb{R}$ est archimédien

Pour tous réels a et b strictement positifs, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $b \leq na$.

Ce qui signifie qu'aussi petite que soit une quantité positive, on peut en l'ajoutant à elle-même suffisamment de fois atteindre n'importe quelle quantité, aussi grande soit elle.

Les axiomes 1,2 et 3 sont vrais aussi pour $\mathbb{Q}$, il faut donc ajouter un axiome permettant de "compléter" $\mathbb{Q}$. On a besoin d'une définition pour énoncer ce dernier axiome : si a et b sont deux réels tels que $a \leq b$, on appelle segment $[a, b]$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$.

4. $\mathbb{R}$ vérifie la propriété des segments emboîtés

Si $(I_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante (pour l'inclusion) de segments non vides, alors leur intersection est non vide, c'est-à-dire qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n.$$

Il ne suffit bien sûr pas d'énoncer ces axiomes pour assurer l'existence d'un ensemble les satisfaisant. Il faut être conscient que nous admettons ici l'existence d'un ensemble difficile à construire ! Par ailleurs, il existe d'autres jeux d'axiomes permettant de construire l'ensemble des réels : on peut, par exemple, remplacer les axiomes 3. et 4. par l'axiome de "la borne supérieure". On note enfin que contrairement aux trois premiers, l'axiome 4. n'est pas satisfait par $\mathbb{Q}$. Par exemple, si on définit (en anticipant sur la définition de la partie entière que l'on verra au paragraphe 1.3) pour tout $n \geq 1$,

$$I_n = [\frac{\lfloor \sqrt{2} 2^n \rfloor}{2^n}, \frac{\lfloor \sqrt{2} 2^n \rfloor + 1}{2^n}] \cap \mathbb{Q}$$

alors

$$\bigcap_{n\geq 1} I_n = \emptyset.$$

C'est donc bien cet axiome qui est décisif pour "grossir" de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$.

Une première remarque après cette construction : les ensembles que l'on a construits sont de plus en plus gros, c'est-à-dire que l'on a les inclusions suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

La notion d'ordre est essentielle. Les axiomes qui font des réels un corps totalement ordonné permettent de retrouver les "règles" dont vous avez l'habitude :

— $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $a \geq 0$, si $x \leq y$ alors $ax \leq ay$
— $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, si $0 < x \leq y$ alors $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$
— $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, si $x \leq y$ alors $-y \leq -x$
— $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$.

Pour le deuxième point, nous avons utilisé la notation courante pour l'inverse d'un réel non nul x, $x^{-1} := \frac{1}{x}$.

Cette relation d'ordre nous conduit à la notion d'**intervalles**.

Définition 1 (Intervalle). *Un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si pour tout $x, y \in I$ et $z \in \mathbb{R}$*

$$x \leq z \leq y \implies z \in I.$$

On peut montrer que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont d'un des types suivants (a et b sont deux réels tels que $a \leq b$) :

$$\begin{array}{lll}]-\infty, a[&]a,b[&]a,+\infty[\\ ]-\infty, a] & [a,b] & [a,+\infty[\\ ]a,b] & [a,b[& \\ ]-\infty,+\infty[& \emptyset & \end{array}$$

Les intervalles de la première ligne sont dits ouverts. Ceux de la seconde sont dits fermés. Ceux de la troisième ne sont ni fermés ni ouverts. Enfin, $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ et l'ensemble vide $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés.

Par ailleurs, on utilisera les notations $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*$ pour les ensembles $\mathbb{N} \setminus \{0\}, \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1.2 Borne supérieure

Nous allons définir les notions de cette section dans le cadre des ensembles réels pour plus de simplicité mais on aurait pu les définir de façon plus abstraite pour n'importe quel ensemble ordonné.

Définition 2. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. On dit que*

— *$M \in \mathbb{R}$ est un **majorant** de A si*

$$\forall y \in A, \quad y \leq M.$$

— *$m \in \mathbb{R}$ est un **minorant** de A si*

$$\forall y \in A, \quad m \leq y.$$

Si A possède des majorants, on dit qu'il est **majoré**. S'il possède des minorants, il est dit **minoré**. S'il est à la fois majoré et minoré, il est dit **borné**.

Par exemple, l'ensemble $A = \{0, \pi, e\} \cup [-20, -15]$ est majoré (par exemple par 4), minoré (par exemple par -22), il est donc borné. En revanche, l'ensemble $A =]-\infty, 12[$ est majoré mais n'est pas minoré (et donc n'est pas non plus borné).

Définition 3. *Un ensemble A de $\mathbb{R}$ possède **un plus grand élément** s'il contient un de ses majorants c'est-à-dire s'il existe $M \in A$ tel que*

$$\forall y \in A, \quad y \leq M.$$

Dans ce cas, on note $M = \max A$.

On définit, de même, la notion de plus petit élément de A noté, quand il existe, $\min A$. Par exemple, 3 est un plus grand élément de $[-3, 3]$ (c'est en fait le seul comme nous allons le voir plus loin) et -3 est le plus petit élément de $[-3, 3]$. Il existe des ensembles, même majorés, qui n'ont pas de plus grand élément. Par exemple

$$A = \left\{2 - \frac{1}{n},\ n \geq 1\right\}$$

est majoré puisque 2, par exemple, en est un majorant mais il ne possède pas de plus grand élément. En effet si M est un majorant de A alors $M \geq 2 - 1/n$ pour tout $n \geq 1$ donc $M \geq 2$ (faites une preuve par l'absurde !). Mais tous les éléments de A sont strictement inférieurs à 2 donc M n'appartient pas à A.

Autre exemple, plus simple : $A = [0, 1[$ n'a pas non plus de plus grand élément puisque l'ensemble de ses majorants est $[1, +\infty[$ dont l'intersection avec A est vide.
Lorsqu'il existe, le plus grand élément est unique :

Proposition 2. *Si un ensemble A admet un plus grand élément alors celui-ci est unique.*

Démonstration. Soit M_1 et M_2 deux plus grands éléments de A. Comme M_1 est plus grand élément de A et que $M_2 \in A$, $M_2 \leq M_1$. De même $M_1 \leq M_2$ et on déduit que $M_1 = M_2$. □

Remarque 1. *On a le même résultat pour le plus petit élément d'un ensemble. Il s'obtient avec la même démonstration.*

Si un ensemble A admet un plus grand élément, on le notera $\max A$. Si A admet un plus petit élément, on le notera $\min A$. Voici un cas où l'existence d'un plus petit élément ou d'un plus grand élément est assuré :

Proposition 3. *Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément.*
Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ a un plus grand élément.

Ces propriétés découlent de la construction des entiers que nous n'avons pas faite. On les admet donc.
On arrive maintenant à la notion la plus importante de cette section

Définition 4 (Borne supérieure 1)**.** *Un réel M est borne supérieure d'un sous-ensemble majoré A de $\mathbb{R}$ si M est le plus petit des majorants de A.*

Il existe une autre définition pour la borne supérieure qui est tout aussi importante :

Définition 5 (Borne supérieure 2)**.** *Un réel M est borne supérieure d'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ si*

i. M est un majorant de A
ii. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,$ tel que $x > M - \varepsilon$.

Nous devons bien sûr maintenant prouver que ces deux définitions sont équivalentes.

Démonstration. Montrons tout d'abord que la Définition 1 implique la Définition 2. Le point *i.* est immédiat puisque le plus petit des majorants appartient à l'ensemble des majorants. Il reste à montrer *ii.* Soit $\varepsilon > 0$. Comme M est le plus petit des majorants de A, $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A et donc il existe $x \in A$ tel que $M - \varepsilon < x$.

Montrons maintenant que la Définition 2 implique la Définition 1. On a déjà, d'après *i.*, que M est un majorant de A, il s'agit donc de montrer que c'est le plus petit. Soit M' un majorant de A. Supposons, par l'absurde que $M' < M$. On pose $\varepsilon = M - M'$. D'après *ii.* il existe un élément $x \in A$ tel que $x > M - \varepsilon = M'$: c'est une contradiction puisque M' est un majorant de A. □

On peut définir de façon analogue la notion de borne inférieure. On dit donc que $m \in \mathbb{R}$ est borne inférieure d'un sous-ensemble non vide minoré A de $\mathbb{R}$ si m est le plus grand des minorants de A. On peut également donner une seconde définition équivalente :

Définition 6 (Borne inférieure)**.** *Un réel m est borne inférieure d'un sous-ensemble non vide minoré A de $\mathbb{R}$ si*

i. m est un minorant de A,
ii. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A$ tel que $x < m + \varepsilon$.

Voici l'une des propriétés les plus importantes de $\mathbb{R}$:

Théorème 1 (Propriété de la borne supérieure)**.** *Tout sous-ensemble non vide majoré de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.*

Avant de prouver ce théorème voyons pourquoi on ne peut espérer se passer de ses hypothèses.

Tout d'abord si A est l'ensemble vide. Alors tout élément de $\mathbb{R}$ est majorant de A. Or $\mathbb{R}$ n'a pas de plus petit élément donc l'ensemble vide n'a pas de borne supérieur. Par ailleurs, si A est un ensemble non majoré alors l'ensemble des majorants de A est l'ensemble vide qui n'admet pas de plus petit élément. Donc A n'admet donc pas de pas de borne supérieur. Les conditions "non vide" et "majoré" sont donc nécessaires pour qu'un ensemble ait une borne supérieure. La proposition nous dit que ces conditions sont aussi suffisantes.

Démonstration. Cette démonstration anticipe la suite du cours. Vous pouvez la sauter en première lecture et y revenir après l'étude du chapitre consacré aux suites.
Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble non vide majoré de $\mathbb{R}$. Comme A est majoré il existe un majorant b_0 de A. Comme A est non vide, il existe $a_0 \in A$. On définit $I_0 = [a_0, b_0]$ et $m_0 = (a_0 + b_0)/2$. On définit ensuite a_1 et b_1 par

— si m_0 est un majorant de A, alors $a_1 = a_0$ et $b_1 = m_0$.
— si m_0 n'est pas un majorant de A, on choisit $a_1 \in A$ tel que $m_0 < a_1$ (il existe un tel élément puisque m_0 n'est pas un majorant de A). On définit aussi $b_1 = b_0$.

On pose $I_1 = [a_1, b_1]$.
Nous allons itérer cette construction. Soit $n \geq 1$. Supposons avoir construit une famille d'intervalles $(I_k)_{0\leq k\leq n} = ([a_k, b_k])_{0\leq k\leq n}$ telle que

- $\forall k \leq n, \quad b_k$ est un majorant de A
- $\forall k \leq n, \quad a_k \in A$
- $\forall k \leq n, \quad b_k - a_k \leq \frac{b_0-a_0}{2^k}$

On pose alors $m_n = (a_n + b_n)/2$ et on définit a_{n+1} et b_{n+1} par

— si m_n est un majorant de A, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$.

— si m_n n'est pas un majorant de A, alors on choisit $a_{n+1} \in A$ tel que $m_n < a_{n+1}$ (il existe un tel élément puisque m_n n'est pas un majorant de A). On définit aussi $b_{n+1} = b_n$.

On pose $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$.
On vérifie qu'on a

- b_{n+1} est un majorant de A
- $a_{n+1} \in A$
- $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{b_0-a_0}{2^{n+1}}$

On vient de construire une suite de segments non vides $(I_n)_{n\geq 0}$ décroissante pour l'inclusion. D'après l'axiome des **segments emboîtés** il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$M \in \bigcap_{n\geq 0} I_n.$$

Nous allons montrer que M est une borne supérieure de A. Commençons par montrer que la suite $(b_n)_{n\geq 0}$ converge vers M. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que $(b_0 - a_0)/2^N < \varepsilon$. Comme pour tout $n \geq 0$, $b_n \in I_n$ et $M \in I_n$, on en déduit

$$\forall n \geq N, \quad |b_n - M| \leq b_n - a_n < \varepsilon.$$

On montre, avec le même argument, la convergence de $(a_n)_{n\geq 0}$ vers M.
Montrons maintenant que M est un majorant de A. Soit $x \in A$. Comme $(b_n)_{n\geq 0}$ est une suite de majorants,

$$\forall n \geq 0, \quad x \leq b_n.$$

On en déduit par passage à la limite que $x \leq M$.
Il reste à montrer que M est le plus petit des majorants. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un majorant M' de A tel que $M' < M$. On pose $\varepsilon = M - M'$. Comme $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers M, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad |a_n - M| < \varepsilon.$$

En particulier, $a_N \in A$ et $a_N > M'$. On tient donc une contradiction ! $\square$

On notera que cette propriété n'est pas vraie dans $(\mathbb{Q}, \leq)$! (en définissant de façon analogue la notion de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$). Par exemple $\{r \in \mathbb{Q},$ tel que $r^2 \leq 2\}$ est non vide et majoré dans $\mathbb{Q}$ mais n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

On peut évidemment énoncer une propriété équivalente pour la borne inférieure.

Proposition 4. *Tout sous-ensemble non vide minoré de* $\mathbb{R}$ *possède une borne inférieure.*

Ce résultat se déduit aisément du Théorème 1.

Théorème 2. *Soit A un sous-ensemble non vide majoré (resp. minoré) de $\mathbb{R}$. Alors il admet une unique borne supérieure (resp. inférieure).*

Démonstration. L'existence est assurée par le Théorème 1. L'unicité est une conséquence directe de la première définition de la borne supérieure et de l'unicité du min assurée par la Proposition 1.2. □

La borne supérieure d'un ensemble A non vide et majoré est notée $\sup A$. La borne inférieure d'un ensemble A non vide et minoré est notée $\inf A$.

Il faut bien faire attention au fait que la borne supérieure d'un ensemble A n'appartient pas forcément à A. Reprenons l'exemple de $A = \{2 - \frac{1}{n},\ n \geq 1\}$. Cet ensemble est majoré non vide donc possède une borne supérieure, en l'occurrence 2, mais cette borne supérieure n'appartient pas à A donc n'est pas un plus grand élément de A.
On distinguera donc bien la notion de sup et de max. Pour un ensemble non vide majoré, le sup existe toujours, alors que le max pas forcément. En revanche, lorsqu'il existe, le max fait partie de l'ensemble alors que le sup pas forcément.
Enfin, on notera que, lorsqu'il existe, le max coïncide avec le sup :

Proposition 5. *Soit $A \subset R$ admettant un* max. *Alors A admet une borne supérieure et* $\sup A = \max A$.

Démonstration. On peut par exemple utiliser la seconde définition de la borne supérieure (Définition 5). Par définition $\max A$ est un majorant de A. De plus le point *ii* est immédiat puisque $\max A \in A$ et on a pour tout $\varepsilon > 0$, $\max A > \max A - \varepsilon$. □

Proposition 6. *Soit* $A \subset \mathbb{R}$ *admettant une borne supérieure telle que* $\sup A \in A$. *Alors* $\sup A = \max A$.

Démonstration. On remarque que $\sup A$ est un majorant de A (d'après la définition 2 de la borne supérieure) et un élément de A, on en déduit que c'est un plus grand élément de A (et donc le seul d'après la Proposition). D'où $\sup A = \max A$. $\square$

On peut donc dire, pour résumer, qu'un max est un sup atteint.

1.3 Partie entière

Nous introduisons une fonction très utile de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 7 (Partie entière)**.** *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, il existe un unique entier relatif* $n \in \mathbb{Z}$ *tel que*

$$n \leq x < n + 1$$

On appelle cet entier n *la* ***partie entière*** *(inférieure) de* x *et on le note* $E(x)$*,* $\lfloor x \rfloor$ *ou encore* $[x]$*.*

Démonstration. Pour l'existence : Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons tout d'abord que $x \geq 0$. L'ensemble $A = \{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } k \leq x\}$ est un sous-ensemble non vide ($0 \in A$) borné (car $\mathbb{R}$ est archimédien) de $\mathbb{N}$ donc admet un plus grand élément d'après la Proposition 3. On appelle $n \in \mathbb{N}$ ce plus grand élément. L'entier n est dans A donc $n \leq x$. De plus $n + 1$ n'est pas dans A sinon n ne serait pas le maximum de A. On en déduit que $x < n + 1$.
Supposons maintenant $x \leq 0$. On raisonne de façon similaire en considérant cette fois le plus petit élément $n \in \mathbb{N}$ de l'ensemble non vide $A := \{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } k \geq -x\}$. On prouve ensuite, comme précédemment, que $-n \leq x < -n + 1$, ce qui permet de conclure.
Pour l'unicité : soit n et n' deux entiers relatifs satisfaisant $n \leq x < n + 1$ et $n' \leq x < n' + 1$. On a alors $n \leq x < n' + 1$, ce qui implique $n \leq n'$. En échangeant les rôles de n et n', on obtient aussi $n' \leq n$. On en déduit $n = n'$. $\square$

La partie entière de x est l'entier inférieur à x le plus proche de x, voir Figure 1.1.

Par ailleurs, on peut aussi montrer de façon similaire qu'il existe un unique entier relatif n tel que

$$n - 1 < x \leq n$$

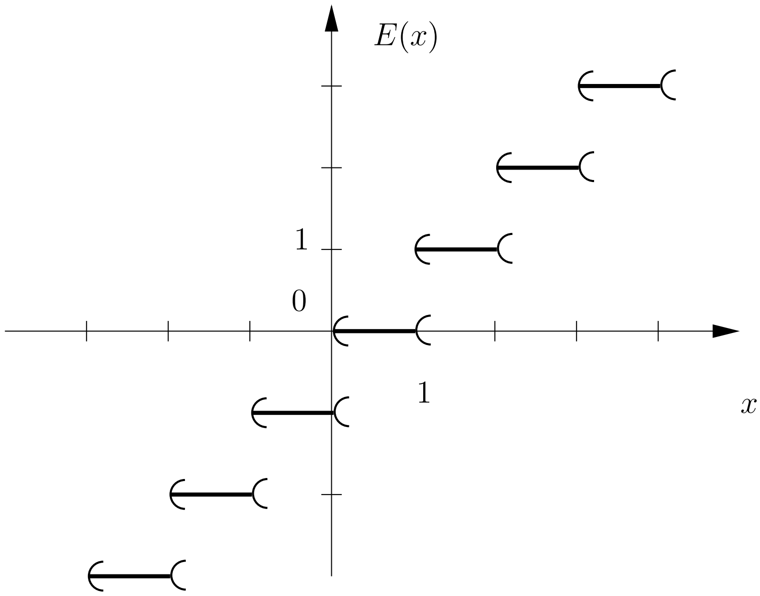

FIGURE 1.1: Graphe de la la fonction $x \mapsto E(x)$. Même si on ne sait pas encore très bien ce qu'est une limite, on prêtera attention aux limites à droite et à gauche aux point entiers.

On appelle n partie entière supérieure de x et on le note $\lceil x \rceil$. Il s'agit cette fois de l'entier supérieur à x le plus proche de x. Les deux propriétés suivantes sont laissées en exercice :
— $\forall x \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$
— $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad \lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$

1.4 Topologie. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

On définit la **valeur absolue** $|x|$ d'un réel x par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Le graphe de cette fonction est représentée Figure 1.2.

On en déduit immédiatement les propriétés suivantes pour la valeur absolue :

Proposition 8. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,
- $|x| \geq 0$

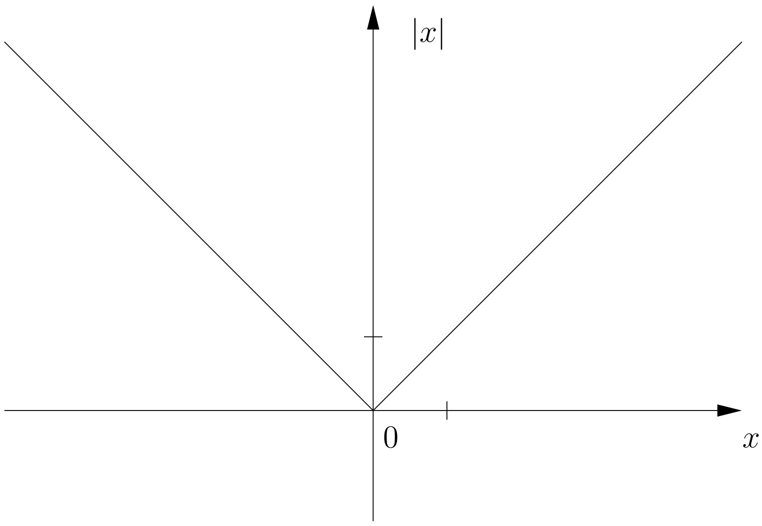

FIGURE 1.2: Graphe de $x \mapsto |x|$.

- $(x \leq y \ et \ -y \leq x) \implies |x| \leq y$
- $|-x| = |x|$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $x \leq |x|$
- $\forall a \geq 0, \quad |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
- $\forall a \geq 0, \quad |x-y| \leq a \Leftrightarrow y-a \leq x \leq y+a$
- $|xy| = |x| \ |y|$

Ces propriétés (dont certaines sont redondantes) sont faciles à montrer à partir de la définition de la valeur absolue. Leurs preuves sont laissées en exercice.

Cette fonction définit une **distance** d "naturelle" sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire, intuitivement, une fonction permettant de calculer la distance ou longueur séparant deux points x et y de la droite :

$$d(x,y) = |x-y|$$

Si x est un réel et ε un réel positif, il faut penser que le segment $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ désigne l'ensemble des réels qui sont à une distance inférieure à ε de x. C'est une version unidimensionnelle du disque dans le plan ou de la boule en dimension 3. Nous utiliserons très souvent cette vision dans le chapitre sur les limites, essayez donc de vous familiariser avec cette façon de penser tout de suite. Une autre façon d'écrire le segment $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ est donc $\{y \in \mathbb{R} \text{ tel que } d(x,y) \leq \varepsilon\}$ ou encore $\{y \in \mathbb{R} \text{ tel que } |x-y| \leq \varepsilon\}$.

Proposition 9 (Inégalité triangulaire)**.** $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,
- $|x+y| \leq |x| + |y|$
- $||x| - |y|| \leq |x-y|$

Démonstration. Pour la première, dite **inégalité triangulaire** :
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Si $x+y \geq 0$, alors $|x+y| = x+y$. Or $x \leq |x|$ et $y \leq |y|$, ce qui permet de conclure. Si $x+y \leq 0$, alors $|x+y| = (-x)+(-y)$. Or $(-x) \leq |x|$ et $(-y) \leq |y|$, et on conclut de la même façon.

On notera que quand x et y sont de mêmes signes $|x+y| = |x| + |y|$. On dit alors que l'inégalité est saturée (i.e. c'est une égalité).

Pour la seconde. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On écrit $x = x - y \ + \ y$ et on applique l'inégalité triangulaire pour obtenir, $|x| - |y| \leq |x-y|$. Puis, $y = y - x \ + \ x$ et on obtient $|y| - |x| \leq |y-x|$. Et on a donc prouvé que $||x| - |y|| \leq |x-y|$. On remarque que cette inégalité implique aussi $||x| - |y|| \leq |x+y|$.

□

Corollaire 1. $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,
- $|x-y| \leq |x| + |y|$
- $|x-y| \leq |x-z| + |y-z|$

Démonstration. Soit x et y deux réels. Pour la première inégalité, on applique directement l'inégalité triangulaire à x et $-y$ donc $|x-y| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$.
Pour la seconde inégalité, il suffit d'écrire que $x - y = x - z \ + \ z - y$ et d'utiliser l'inégalité triangulaire. □

La valeur absolue permet une caractérisation très utile des sous-ensembles bornés :

Proposition 10. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. Alors A est borné si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\forall y \in A, \quad |y| \leq M.$$

La preuve est laissée en exercice.

Nous allons maintenant voir que même si $\mathbb{Q}$ est beaucoup plus petit que $\mathbb{R}$, l'ensemble des rationnels est arbitrairement proche de n'importe quel réel. On dit qu'il est **dense** dans $\mathbb{R}$.

Définition 7. *Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est dit dense dans $\mathbb{R}$ si pour tout intervalle ouvert non vide $]a,b[$, $A \cap]a,b[$ est non vide.*

Proposition 11. *$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$ (on traitera les autres cas après). On veut montrer qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $a < r < b$. L'idée de la preuve est assez simple : si on trace un réseau de pas δ avec $\delta \in \mathbb{Q}$ et $\delta \leq (b-a)/2$ alors au moins un des points du réseau "tombe" dans l'intervalle $]a, b[$. Ecrivons maintenant cette idée rigoureusement.
Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n(b-a)/2 \geq 1$ ($1/n$ va jouer le rôle de δ). On définit le sous-ensemble de $\mathbb{N}$

$$I = \{k \in \mathbb{N},\ k/n > a\}.$$

De nouveau comme $\mathbb{R}$ est archimédien, I est non vide. L'ensemble I est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$: il a donc, d'après la Proposition 3 un plus petit élément que l'on note K (on pourra vérifier que $K = \lceil an \rceil + 1$). Comme $K \in I$, $K/n > a$. De plus $K/n = (K-1)/n + 1/n$. Or $K-1 \notin I$ donc $(K-1)/n \leq a$ et comme $1/n \leq (b-a)/2$, on a prouvé que $K/n \leq a + (b-a)/2 < b$.
Finalement, $K/n \in \mathbb{Q}$ et $a < K/n < b$.
On conclut la preuve en traitant avec les autres cas d'intervalles :
Si $a < b < 0$, on se ramène au cas que l'on vient d'étudier : il existe un rationnel r tel que $0 < -b < r < -a$ et on a donc bien $a < -r < b$ et $-r \in \mathbb{Q}$.
Si $a < 0 < b$, il suffit de remarquer que $0 \in \mathbb{Q} \cap]a, b[$. □

Concrètement, si x est un réel alors pour tout $\varepsilon > 0$ (qu'il faut penser arbitrairement petit) on peut trouver un rationnel r qui est $\varepsilon-$proche de x, c'est-à-dire tel que $d(x, r) < \varepsilon$ ou encore $x - \varepsilon < r < x + \varepsilon$.

On vient de prouver que les rationnels sont "suffisamment nombreux" pour correctement approximer la droite réelle. Malgré cela, la section suivante montre qu'il y a "très peu" de rationnels.

1.5 $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

Dans cette section, nous allons voir que $\mathbb{R}$ est beaucoup plus gros que $\mathbb{Q}$. On rappelle qu'un ensemble est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$. De façon équivalente, on peut dire qu'un ensemble A est dénombrable s'il existe une injection de A dans $\mathbb{N}$.

Proposition 12. *L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable.*

Démonstration. Commençons par prouver que $\mathbb{Q}^+$ est dénombrable. On considère tout d'abord la fonction

$$\begin{array}{cccl} f & : & \mathbb{Q}^+ & \to & \mathbb{N}\times\mathbb{N}\setminus\{0\} \\ & & r & \mapsto & (n,m) \text{ tel que } r = \frac{n}{m} \text{ et } n\wedge m = 1 \end{array}$$

On remarque que f est injective. En effet, soit r et r' deux rationnels et $(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\setminus\{0\}$ tels que $f(r) = f(r') = (n,m)$. Alors $r = r' = n/m$.
Montrons maintenant qu'il existe une injection de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{N}$. On considère pour cela la fonction

$$\begin{array}{cccl} g & : & \mathbb{N}\times\mathbb{N}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{N} \\ & & (n,m) & \mapsto & 2^n 3^m \end{array}$$

D'après le théorème de décomposition d'un entier en un produit de facteurs premiers : si (n,m) et (n',m') sont deux couples d'entiers naturels tels que $2^n3^m = 2^{n'}3^{m'}$ alors $(n,m) = (n',m')$. Donc g est injective.
On en déduit que la fonction $g\circ f$ est une injection de $\mathbb{Q}^+$ dans $\mathbb{N}$. On a prouvé que $\mathbb{Q}^+$ est dénombrable.
On obtient ensuite que $\mathbb{Q}$ est dénombrable comme union de deux ensembles dénombrables $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$. □

Proposition 13. *$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

La preuve de cette proposition anticipe malheureusement un peu sur la suite du cours. On n'en présente de toute façon qu'une version peu détaillée : prenez tout de même le temps de la lire et d'en comprendre les grandes étapes.

Démonstration. La clé de la preuve, due à Cantor, est le résultat suivant :

Lemme 1. *L'ensemble E des suites à valeurs dans $\{0,1\}$ n'est pas dénombrable.*

Avant la preuve, une remarque : E est en bijection avec l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des partie de $\mathbb{N}$. Essayez de trouver une bijection entre ces deux ensembles !

Démonstration. Soit A une partie dénombrable de E. Notre but est de trouver un élément $a \in E$ qui n'appartient pas à A (ce qui prouve que $A \neq E$). Comme A est dénombrable, on peut l'écrire

$$A = \{a^1, a^2, \cdots\}$$

où pour tout $p \in \mathbb{N}$, a^p désigne une suite $(a^p_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\{0,1\}$.
On considère maintenant la suite $b \in E$ définie par

$$\forall n \geq 1, \quad b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } a^n_n = 1 \\ 1 & \text{si } a^n_n = 0 \end{cases}$$

Par construction, pour tout $p \in \mathbb{N}$, b diffère de a^p puisque $b_p \neq a^p_p$. On en déduit que $b \notin A$ et cela conclut la preuve du lemme. $\square$

Avant de passer à l'étape suivante, nous allons un petit peu améliorer notre lemme. On remarque tout d'abord que le sous-ensemble E' des suites de E constantes égales à 1 à partir d'un certain rang est dénombrable. En effet

$$E' = \cup_{N=1}^{+\infty} \{a \in E \text{ tel que } a_n = 1, \forall n \geq N\}$$

est une union dénombrable d'ensembles dénombrables (finis même) donc E' est dénombrable. On en déduit que $E \setminus E'$ n'est pas dénombrable (sinon E serait dénombrable comme union de deux ensembles dénombrables).

Ce lemme va nous permettre de montrer que $[0, 1[$ n'est pas dénombrable (ce qui implique que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable). Il faut pour cela prouver que $E \setminus E'$ **est en bijection avec** $[0, 1[$. On considère l'application qui à $x \in [0, 1[$ associe la suite $a \in E \setminus E'$ définie par récurrence par $a_1 = \lfloor 2x \rfloor$ et

$$\forall n > 1, \quad a_n = \lfloor 2^n x \rfloor - \sum_{k=1}^{n-1} a_k 2^{n-k}.$$

Nous n'allons pas prouver que cette application est bien la bijection recherchée. Il est en revanche important de comprendre géométriquement comment un nombre réel est codé par cette application.
Cette dernière propriété (admise donc) nous permet de conclure la preuve : puisque $E \setminus E'$ n'est pas dénombrable, $[0, 1[$ ne l'est pas non plus et donc $\mathbb{R}$ non plus. $\square$

On déduit par ailleurs du résultat précédent qu'il n'y a pas non plus de bijection entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sinon, puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable, il y en aurait une entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$.

Corollaire 2. *L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas dénombrable.*

Démonstration. C'est une conséquence du fait que l'union de deux ensembles dénombrables est dénombrable et des deux propositions précédentes. $\square$

Proposition 14. *$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. On veut montrer qu'il existe un réel $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $a < r < b$. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors $]a, b[\subset \mathbb{Q}$. Par ailleurs, en considérant la bijection

$$\begin{array}{ccc}]a, b[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x-(a+b)/2}{(x-a)(x-b)} \end{array}$$

on vérifie que $]a, b[$ est en bijection avec $\mathbb{R}$ et n'est donc pas dénombrable. On tient donc une contradiction. $\square$

En conclusion : $\mathbb{R}$, non dénombrable, est beaucoup plus "gros" que $\mathbb{Q}$, dénombrable. Il y a beaucoup plus de nombres réels non rationnels que de nombres réels rationnels !

Chapitre 2

Quelques outils pour l'analyse

Dans ce chapitre il n'y a pas de grandes nouveautés théoriques. L'objectif est de vous donner un peu d'aisance technique pour manipuler les objets de ce semestre et des suivants. Il s'agit essentiellement de résultats que vous avez vus en terminale. Nous allons les revoir sans les démontrer. La plupart d'entre eux seront cependant établis dans la suite du cours. Ce chapitre est donc une petite parenthèse dans le projet du cours de démontrer tout ce que l'on dit. Dans de nombreuses copies, trop de points sont perdus sur des choses faciles (par exemple en n'inversant pas le sens d'une inégalité lorsqu'on la multiplie par un réel négatif ou en se trompant en dérivant une fonction composée) Pour pouvoir se concentrer sur les choses délicates, il faut s'entrainer à être efficace et concentré sur les choses faciles ! Ce chapitre devrait se lire vite et il faut surtout faire les exercices qui l'accompagnent dans le livret.

2.1 Equations et inéquations

Comment **se débarrasser des valeurs absolues** (ce qui n'est d'ailleurs pas toujours nécessaire) dans les équations et inéquations ? Si f est une fonction et a un réel positif :

— les solutions de l'équation $|f(x)| = a$ sont les solutions de $f(x) = a$ et celles de $f(x) = -a$

— les solutions de l'inéquation $|f(x)| \leq a$ sont les solutions de $-a \leq f(x) \leq a$

— les solutions de l'inéquation $|f(x)| \geq a$ sont les solutions de $f(x) \geq a$ et celles de $f(x) \leq -a$

Si a est un réel strictement négatif, les équations $|f(x)| = a$ et $|f(x)| \leq a$ n'ont pas de solution tandis que tous les réels du domaine de définition de f sont solutions de $|f(x)| \geq a$.

Il faut réviser les **identités remarquables** classiques du lycées.
Il faut être capable de calculer rapidement les **racines d'un polynôme du second degré**, y compris dans le cas où ces racines sont complexes.

2.2 Fonctions usuelles

Les fonctions puissances, logarithme, exponentielle, ainsi que les fonctions trigonométriques doivent être connues et leurs propriétés maitrisées.

1. *La fonction **exponentielle**,*

$$\begin{array}{rcccc} \exp & : & \mathbb{R} & \to &]0,+\infty[\\ & & x & \mapsto & e^x \end{array}$$

*est **strictement croissante.** Elle vérifie*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x > 0$$
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad e^{x+y} = e^x e^y$$

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est elle-même, la fonction exponentielle. C'est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$ et sa bijection réciproque et la fonction logarithme.

2. *La fonction **logarithme**,*

$$\begin{array}{rcccc} \ln & : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$$

*est **strictement croissante**. Elle vérifie*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction définie pour $x > 0$ par $x \mapsto 1/x$.
C'est une bijection de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et sa bijection réciproque et la fonction exponentielle.

3. *Les fonctions **cosinus** et **sinus** sont définies sur $\mathbb{R}$. Elles vérifient*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2\cos(x) = e^{ix} + e^{-ix}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (2i)\sin(x) = e^{ix} - e^{-ix}$$

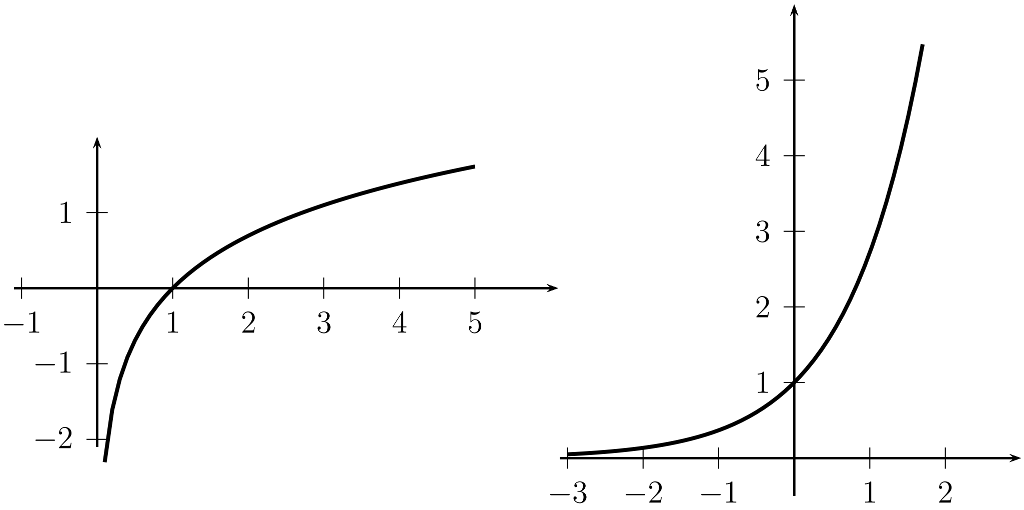

FIGURE 2.1: Les graphes des fonctions logarithme et exponentielle.

Elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$. La dérivée de cosinus est $(-$sinus$)$ et celle de sinus est cosinus.
On prendra soin de reviser quelques formules de trigonométrie et surtout d'apprendre à les retrouver grâce à l'écriture avec l'exponentielle complexe.
*On rappelle que la fonction **tangente** est définie comme le quotient de sinus par cosinus.*

4. *Les **fonctions puissances** sont introduites dans l'Appendice B mais le semestre n'est sans doute pas encore assez avancé pour que vous puissiez comprendre les différentes étapes de leur construction. Leur propriétés importantes (continuité et dérivabilité) sont énoncées dans les Théorèmes 14 et 16 qui s'insèrent plus tard dans le cours mais que vous devez consulter tout de suite. On rappelle également l'importante propriété suivante :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ \forall a \in \mathbb{R}, \quad x^a = e^{a \ln x}$$

2.3 Etude de fonctions

Révisez ce chapitre classique de terminale ! A ce stade du cours, il s'agit surtout d'être capable de dessiner le graphe d'une fonction en faisant apparaitre les informations importantes. Pour cela :

1. On détermine le **domaine de définition** de la fonction et on essaie de remarquer une éventuelle **parité**.
2. On étudier la **continuité et la dérivabilité** sur ce domaine.
3. Si elle est dérivable **on calcule sa dérivée.** Il est indispensable de connaitre la **formule de dérivation d'une fonction composée (Proposition 48)** ainsi que toutes les **dérivées de fonctions usuelles (Théorème 16)**. En étudiant le signe de la dérivée, on détermine les sens des **variations de la fonction**.
4. On étudie l'existence et les valeurs éventuelles des **limites aux bords du domaine de définition**. Ce point peut aussi être réalisé plus tôt afin de se faire une première idée du graphe.
5. On dessine le **graphe de la fonction** en utilisant les points précédents et en considérant quelques points caractéristiques. On y ajoute quelques **asymptotes et tangentes** lorsque c'est pertinent.

Pour l'étude des limites, il arrive que les formes indéterminées soient levées en utilisant le Théorème 10 des **croissances comparées**. C'est un résultat important permettant de comparer puissances, logarithmes et exponentielles. Apprenez-le une bonne fois pour toutes !

Théorème (Croissances comparées)**.** *Pour tout $a \neq 0$, et $b, c \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{ax}|x|^b \ln^c |x| = \lim_{x\to\pm\infty} e^{ax}$$

Pour tout $b \neq 0$, et $c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} |x|^b \ln^c |x| = \lim_{x\to+\infty} |x|^b$$

Pour tout $b \neq 0$, et $c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0^+} x^b |\ln x|^c = \lim_{x\to 0^+} x^b$$

Chapitre 3

Suites

3.1 Définition et premières propriétés

On appelle **suite réelle** une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire une application qui à chaque entier associe un nombre réel. Si u est une suite, on adoptera souvent la notation u_n pour désigner l'image de $n \in \mathbb{N}$ par u plutôt que la notation fonctionnelle $u(n)$. On désignera aussi souvent u par $(u_n)_{n\geq 0}$. Il arrive que la suite ne soit définie qu'à partir d'un certain rang, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ne considère que $(u_n)_{n\geq k}$.
On peut définir une suite en donnant pour tout $n \geq 0$, la valeur de u_n en fonction de n. On peut par exemple définir la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = \ln(1 + n^2).$$

Il est courant aussi de définir une suite *par récurrence*, c'est-à-dire en exprimant pour $n \geq 1$ la valeur de u_n en fonction des termes précédents $u_0, \cdots, u_{n-1}$. On peut par exemple définir la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = u_{n-1}^2.$$

Si u et v sont deux suites alors on peut les **sommer et multiplier** en définissant les suites $u + v$ et uv par

$$\begin{aligned} \forall n \geq 0 \qquad & (u+v)_n = u_n + v_n \\ \forall n \geq 0 \qquad & (uv)_n = u_n \, v_n \end{aligned}$$

Si u est une suite ne s'annulant pas, on peut considérer son **inverse** en définissant la suite $1/u$ par

$$\forall n \geq 0 \qquad \left(\frac{1}{u}\right)_n = \frac{1}{u_n}$$

On peut également multiplier une suite u par un réel a définissant ainsi la suite au par

$$\forall n \geq 0 \qquad (au)_n = a\, u_n$$

Définition 8. *Soit u une suite réelle.*

— *On dit que u est* ***constante*** *s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = a.$$

— *On dit que u est* ***stationnaire*** *s'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall n \geq p, \quad u_n = a.$$

— *On dit que u est* ***périodique*** *s'il existe $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que*

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+p} = u_n.$$

On dit alors que p est une ***période*** *de u.*

Un exemple trivial est la suite définie par récurrence de la façon suivante : $u_0, \cdots, u_{p-1}$ sont donnés dans $\mathbb{R}$ et pour $n \geq p$, $u_n = u_{n-p}$. Une telle suite est alors périodique de période p. La suite définie pour $n \geq 0$ par $u_n = (-1)^n$ est quant à elle périodique de période 2.

Définition 9. *On dit qu'une suite réelle u est croissante (resp. décroissante) si*

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+1} \geq u_n \quad (\text{resp. } u_{n+1} \leq u_n).$$

Quand une suite est croissante ou décroissante, on dit qu'elle est monotone.

On vérifiera facilement qu'une suite u est croissante si et seulement si

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad u_{n+p} \geq u_n.$$

Pour montrer qu'une suite est croissante, il faut calculer pour tout $n \geq 1$, $u_n - u_{n-1}$ et montrer que cette quantité est positive. Par exemple, pour montrer que la suite définie par récurrence par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $u_n = u_{n-1} + n$ est croissante, il suffit de remarquer que pour tout $n \geq 1$, $u_n - u_{n-1} = n \geq 0$.

Définition 10. *On dit qu'une suite réelle u est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si*

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+1} > u_n \quad (\text{resp. } u_{n+1} < u_n).$$

Quand une suite est strictement croissante ou strictement décroissante on dit qu'elle est strictement monotone.

De nouveau une suite u est strictement croissante si et seulement si

$$\forall n \geq 0, \forall p \geq 1, \quad u_{n+p} > u_n.$$

Définition 11. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\mathcal{P}$ une propriété. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\mathcal{P}$* ***à partir d'un certain rang*** *s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $(u_n)_{n\geq p}$ vérifie $\mathcal{P}$.*

Par exemple, la suite définie pour tout $n \geq 0$ par $u_n = -10+n$ est positive à partir d'un certain rang puisqu'on vérifie bien que pour tout $n \geq 10$, $u_n \geq 0$. Autre exemple : la suite définie pour tout $n \geq 0$ par $u_n = e^n/n^{10}$ est croissante, et même strictement croissante à partir d'un certain rang.

Définition 12. *On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est*

— *majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\forall n \geq 0, \qquad u_n \leq M$$

— *minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\forall n \geq 0, \qquad u_n \geq m$$

— *bornée si elle est à la fois majorée et minorée.*

Proposition 15. *Une suite u est bornée si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\forall n \geq 0 \qquad |u_n| \leq M.$$

Lorsqu'ils existent, on définit **supremum**, **infimum**, **maximum** et **minimum** d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par

$$\begin{aligned}
\sup\ u &= \sup_{n\geq 0}\ u_n = \sup\{u_n,\ n \geq 0\} \\
\inf\ u &= \inf_{n\geq 0}\ u_n = \inf\{u_n,\ n \geq 0\} \\
\max\ u &= \max_{n\geq 0}\ u_n = \max\{u_n,\ n \geq 0\} \\
\min\ u &= \min_{n\geq 0}\ u_n = \min\{u_n,\ n \geq 0\}
\end{aligned}$$

On se ramène donc aux mêmes notions pour des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ (c'est une bonne occasion de réviser !).

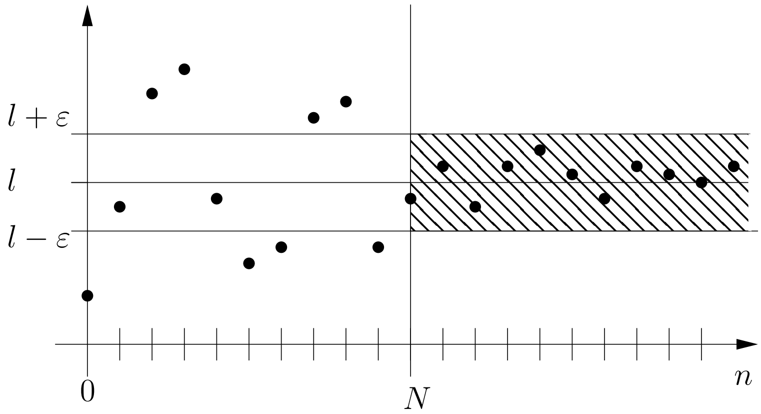

FIGURE 3.1: Exemple d'une suite convergente u.

3.2 Limite

Nous abordons pour la première fois la notion de limite. Il s'agit d'une des notions les plus importantes de l'année que l'on retrouvera d'ailleurs dans le chapitre consacré aux fonctions. Il est indispensable d'avoir une compréhension fine de la définition suivante :

Définition 13. *On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ a pour limite $l \in \mathbb{R}$, ou que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - l| < \varepsilon.$$

On aurait aussi pu définir la convergence en remplaçant $|u_n - l| < \varepsilon$ par $|u_n - l| \leq \varepsilon$. Les deux définitions sont équivalentes (le prouver !) et, dans la suite, nous utiliserons alternativement l'une ou l'autre selon le contexte. On note souvent la convergence par $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$. Avant d'utiliser la notation $\lim_{n\to+\infty} u_n$, il est indispensable d'avoir prouvé la convergence de la suite u.
Pour comprendre cette définition il faut comprendre que $|u_n - l|$ désigne la distance entre u_n et l. Pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe donc un rang N (qu'on peut imaginer devoir être de plus en plus grand quand ε est de plus en plus petit) tel que tous les termes de la suite, à partir du rang N, ont leurs valeurs ε- proche de l. On peut voir Figure 3.1 une représentation de la convergence.

Montrons par exemple la convergence vers 0 de la suite définie pour $n \geq 1$ par $u_n = 1/n$. Soit $\varepsilon > 0$. Le but est de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout

$n \geq N$, $|u_n| \leq \varepsilon$. On pose $N = \lceil 1/\varepsilon \rceil$ (mais on pourrait tout aussi bien prendre un entier encore plus grand). On a alors

$$\forall n \geq N, \quad |1/n - 0| \leq 1/N \leq \varepsilon.$$

Cela conclut la preuve.

Remarque 2. *On vérifie facilement qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers un réel l si et seulement si la suite $(u_n - l)_{n\geq 0}$ converge vers 0. Cela simplifie parfois la rédaction de certaines preuves.*

Il existe des suites qui n'ont pas de limite. Pour exprimer qu'une suite n'a pas de limite, il faut nier la définition de la convergence : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $l \in \mathbb{R}$ si :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N, \quad |u_n - l| \geq \varepsilon.$$

Pour dire qu'une suite n'a pas de limite, on est obligé de dire que pour tout $l \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers l :

$$\forall l \in \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N, \quad |u_n - l| \geq \varepsilon.$$

Cette définition pour "ne pas avoir de limite" est peu commode et, en pratique, nous ne l'utiliserons que rarement. Voici néanmoins un exemple où nous allons la vérifier : montrons que la suite u définie par

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = (-1)^n$$

n'a pas de limite. Soit $l \in \mathbb{R}$. On pose $\varepsilon = 1/2$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Notre but est de trouver un entier $n \geq N$ tel que $|u_n - l| \geq 1/2$. Comme des deux entiers N et $N+1$ l'un est pair et l'autre est impair, on a

$$2 = |u_N - u_{N+1}| \leq |u_N - l| + |u_{N+1} - l|.$$

On en déduit que $|u_N - l| \geq 1$ ou $|u_{N+1} - l| \geq 1$. Cela permet de conclure.

Sur cet exemple, il est très facile d'appliquer la définition de "ne pas converger" mais, en général, c'est souvent bien plus délicat. Nous verrons plus loin (Proposition 22) une méthode plus rapide pour montrer qu'une suite ne converge pas.

On dit qu'une suite *diverge* si elle n'est pas convergente. Il faut distinguer dans ce cas les suites qui ont une **limite infinie** de celles qui n'en ont pas.

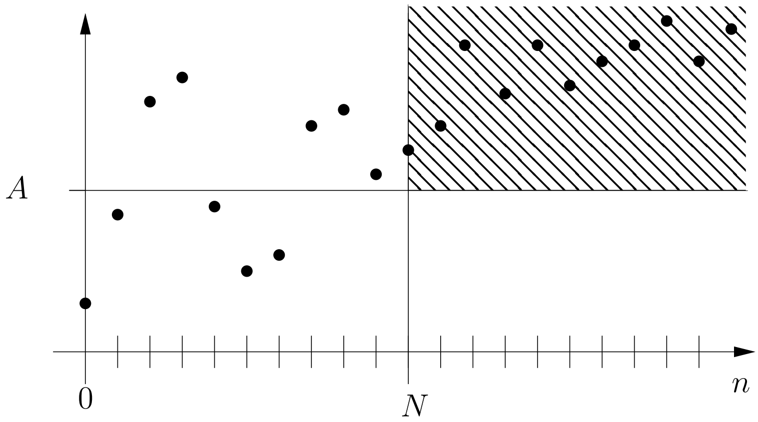

FIGURE 3.2: Une suite divergeant vers $+\infty$.

Définition 14. *On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$, ou aussi que $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge vers l'infini si*

$$\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \quad \forall n \geq N, \quad u_n > A.$$

On note alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. On définit de manière analogue la divergence vers $-\infty$.

Attention ! Toutes les suites divergentes ne divergent pas vers l'infini. Il existe aussi des suites divergentes qui n'ont pas de limite du tout. On dit qu'elles divergent sans limite. L'exemple que l'on vient de voir de la suite définie par $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \geq 0$ est un exemple de suite divergeant sans limite.
Montrons par exemple que la suite définie par $u_n = \sqrt{n}$ pour $n \geq 0$ tend vers $+\infty$:
Soit $A > 0$. On pose $N = \lceil A^2 \rceil$. On a alors

$$\forall n \geq N, \quad \sqrt{n} \geq \sqrt{N} \geq \sqrt{A^2} = A.$$

Et cela conclut la preuve.
Intuitivement, la définition de tendre vers l'infini dit qu'aussi grand que soit le réel A, il existe un rang N tel que tous les termes de la suite à partir de ce rang soient supérieurs à A. On se reportera à la Figure 3.2 pour une représentation d'une suite divergeant vers $+\infty$.

Nous allons maintenant voir quelques propriétés importantes des limites. La proposition suivante nous assure qu'une suite a au plus une seule limite.

Proposition 16 (Unicité de la limite)**.** *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle et l et l' deux réels. Si $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l et vers l' alors $l = l'$.*

Démonstration. Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons que $l \neq l'$. On pose $\varepsilon = |l - l'|/2$. La définition de la convergence de $(u_n)_{n\geq 0}$ vers l nous assure l'existence de $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, \quad |u_n - l| < \varepsilon.$$

La convergence de $(u_n)_{n\geq 0}$ vers l' nous assure l'existence de $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, \quad |u_n - l'| < \varepsilon.$$

On pose $N = \max\{N_1, N_2\}$. Comme $N \geq N_1$ et $N \geq N_2$, $|u_N - l| < \varepsilon$ et $|u_N - l'| < \varepsilon$. D'après l'inégalité triangulaire, on a donc

$$|l - l'| \leq |l - u_N| + |u_N - l'| < 2\varepsilon = |l - l'|. \tag{3.1}$$

On a donc une contradiction qui nous permet de conclure. □

Proposition 17. *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. Soit $l \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite convergeant vers l. On pose $\varepsilon = 1$ (ce choix est arbitraire). D'après la définition de la convergence, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad u_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[.$$

On pose $M_1 = \max\{|l - \varepsilon|, |l + \varepsilon|\}$ et on a donc

$$\forall n \geq N, \quad |u_n| \leq M_1.$$

On a en fait presque terminé la preuve puisqu'on a borné tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. En effet, il suffit maintenant de définir

$$M_2 = \max\{|u_0|, \cdots, |u_{N-1}|\}$$

puis de poser $M = \max\{M_1, M_2\}$. On vérifie ensuite aisément que u est bornée par M. Soit $n \in \mathbb{N}$:
si $n \leq N - 1$ alors $|u_n| \leq M_2 \leq M$.
si $n \geq N$ alors $|u_n| \leq M_1 \leq M$. □

On retiendra donc aussi de cette preuve que si une suite est bornée à partir d'un certain rang, elle est en fait bornée. C'est pour ça que l'expression "bornée à partir d'un certain rang" n'a pas beaucoup de sens ou, en tout cas, d'intérêt : on ne l'emploiera pas.

3.3 Opérations sur les limites

On a vu que l'on pouvait sommer, multiplier, et considérer les inverses de suites. Que peut-on dire, lorsqu'elles existent, des limites des suites ainsi obtenues ?

Proposition 18 (Opérations sur les limites 1)**.** *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles convergeant respectivement vers deux réels l et l' et $a \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\begin{aligned}(u+v)_n &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l+l' \\ (au)_n &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} al \\ (uv)_n &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} ll'\end{aligned}$$

Si de plus $l \neq 0$ alors $1/u$ est bien défini à partir d'un certain rang et

$$\left(\frac{1}{u}\right)_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{l}$$

Démonstration. On montre seulement la première partie de la proposition, les autres assertions sont laissées en exercice. En utilisant la Remarque 2, on peut se ramener au cas où u et v convergent vers 0. Soit $\varepsilon > 0$. La définition de la convergence nous assure l'existence de deux entiers N_1 et N_2 tels que

$$\begin{aligned}\forall n \geq N_1, \qquad |u_n| < \varepsilon/2 \quad \text{et} \\ \forall n \geq N_2, \qquad |v_n| < \varepsilon/2.\end{aligned}$$

On pose $N = \max\{N_1, N_2\}$. On a donc

$$\forall n \geq N, \quad |u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| < \varepsilon.$$

C'est bien ce que l'on voulait montrer. □

Corollaire 3. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites telles que u converge vers $l \in \mathbb{R}$ et $u - v$ converge vers 0. Alors v converge vers l.*

Démonstration. Pour tout $n \geq 0$,

$$v_n = v_n - u_n \ + \ u_n.$$

Or $(u_n - v_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 et $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l, le résultat est donc une conséquence directe du théorème précédent. □

Nous allons maintenant nous intéresser au cas où au moins une des deux limites est infinie.

Proposition 19 (Opérations sur les limites 2)**.** *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *et* $(v_n)_{n\geq 0}$ *deux suites réelles.*

— *Si* $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *et* $(v_n)_{n\geq 0}$ *est minorée ou* $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *alors*

$$u_n + v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

— *Si* $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *et il existe* $a > 0$ *tel que* $(v_n)_{n\geq 0}$ *soit minorée par* a *à partir d'un certain rang alors*

$$u_n\ v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

— *Si* $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *et il existe* $a < 0$ *tel que* $(v_n)_{n\geq 0}$ *soit majorée par* a *à partir d'un certain rang alors*

$$u_n\ v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

— *Si* $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *alors* $(u_n)_{n\geq 0}$ *est strictement positif à partir d'un certain rang donc* $1/u$ *est bien définie à partir d'un certain rang. De plus*

$$\frac{1}{u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

— *Si* $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *et que* $1/u$ *est bien défini alors*

$$\frac{1}{|u_n|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Si $(u_n)_{n\geq 0}$ *est de signe constant à partir d'un certain rang, on peut enlever la valeur absolue et la convergence a lieu vers l'infini du signe correspondant.*

Démonstration. De nouveau on ne montre qu'une seule des ces propriétés, la seconde par exemple, et les autres sont laissées en exercice. Soit $A > 0$. On observe que $A/a > 0$ donc, d'après définition de la divergence de u vers l'infini, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, \quad u_n \geq A/a.$$

Par ailleurs, comme v est minoré par a à partir d'un certain rang, il existe N_2 tel que pour tout $n \geq N_2$, $v_n \geq a > 0$. On pose $N = \max\{N_1, N_2\}$. On a bien

$$\forall n \geq N, \quad u_n v_n \geq A.$$

□

3.4 Formes indéterminées et croissances comparées

Dans certains cas, la connaissance de la limite des différentes suites d'une expression ne permet pas de déduire la limite de l'expression. On parle de **formes indéterminées**. Par exemple, si $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ tendent vers $+\infty$ alors il n'est pas possible d'en déduire, sans davantage d'informations, la limite de $(u_n - v_n)_{n\geq 0}$. Les formes indéterminées sont les suivantes :

$$+\infty - +\infty \qquad 0\times\infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 1^{\infty}$$

Vous avez sans doute déjà été confrontés aux quatre premières, la cinquième en revanche vous semble peut-être plus mystérieuse. Lorsqu'on doit étudier une suite de type $(u_n^{v_n})_{n\geq 0}$ où $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite à valeurs dans $]0,+\infty[$ tendant vers 1 et $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite tendant vers $+\infty$, il faut toujours l'écrire $(e^{v_n \ln(u_n)})_{n\geq 0}$ et étudier la limite de $(v_n \ln(u_n))_{n\geq 0}$. On est donc ramené à la forme indéterminée dont vous avez l'habitude : $0\times\infty$.
Attention également de ne pas inventer des formes indéterminées : $0/\infty$ n'est pas indéterminé !

S'il faut en général *lever* la forme indéterminée au cas par cas, il faut connaitre le théorème suivant, dit des croissances comparées, qui permet de lever les indéterminations dues au produit ou quotient de fonctions exponentielles, puissances ou logarithmes.

Théorème 3 (Croissances comparées)**.** *Pour tout $a\neq 0$, et $b,c\in\mathbb{R}$*

$$\lim_{n\to+\infty} e^{an}n^b\ln^c n = \lim_{n\to+\infty} e^{an}$$

Pour tout $b\neq 0$, et $c\in\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} n^b\ln^c n = \lim_{n\to+\infty} n^b$$

La "morale" de ce résultat est que le comportement de la fonction est déterminé en priorité par l'exponentielle puis par la puissance et enfin par le logarithme. On prouvera ce résultat dans le chapitre consacré aux fonctions.

3.5 Comparaison de limites

Proposition 20. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites convergeant respectivement vers deux réels l et l'. On suppose de plus qu'à partir d'un certain* *rang,*

$$u_n \leq v_n.$$

Alors $l \leq l'$

Démonstration. Soit l et l' deux réels, et $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites vérifiant les hypothèses de la proposition. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la définition de la convergence de u et v, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{aligned} \forall n \geq N_1, &\quad |u_n - l| \leq \varepsilon \\ \forall n \geq N_2, &\quad |v_n - l'| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après l'hypothèse de comparaison, il existe $N_3 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_3, \quad u_n \leq v_n.$$

On pose $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$. On a alors

$$l - l' = l - u_N \ + \ u_N - v_N \ + \ v_N - l' \leq 2\varepsilon$$

On a donc $l \leq l' + 2\varepsilon$. Comme on peut choisir, en début de preuve, ε arbitrairement petit, on en déduit que $l \leq l'$. □

Remarque 3. *Dans la proposition précédente : utiliser une hypothèse plus forte (l'inégalité stricte) n'est pas suffisant pour obtenir une conclusion plus forte (l'inégalité stricte pour les limites). On peut par exemple comparer les limites de la suite* $(1/n)_{n\geq 1}$ *et de la suite constante égale à* 0. *On a bien pour tout* $n \geq 1$, $1/n > 0$ *mais les deux suites ont pour limite* 0. *On retiendra donc que les inégalités strictes ne passent pas à la limite. Sans autres hypothèses, elles se "transforment" en inégalités simples.*

Corollaire 4. *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite convergente vers un réel* l. *On suppose qu'il existe* $a \in \mathbb{R}$ *tel que à partir d'un certain rang,*

$$u_n \leq a.$$

Alors $l \leq a$.

Démonstration. C'est une application directe de la proposition précédente en prenant pour v la suite constante égale à a. □

Proposition 21. *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *et* $(v_n)_{n\geq 0}$ *deux suites. On suppose que* $(u_n)_{n\geq 0}$ *diverge vers* $+\infty$ *et qu'à partir d'un certain rang,*

$$u_n \leq v_n.$$

Alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Démonstration. Soit $A > 0$. D'après la définition de la divergence de u vers $+\infty$, il existe N_1 tel que

$$\forall n \geq N_1, \quad u_n \geq A.$$

Par ailleurs, il existe N_2 tel que

$$\forall n \geq N_2, \quad v_n \geq u_n.$$

On pose $N = \max\{N_1, N_2\}$ et on a

$$\forall n \geq N, \quad v_n \geq u_n \geq A.$$

□

3.6 Suite extraite

Pour toute fonction ϕ **strictement croissante** de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on définit la **suite extraite, ou sous-suite** de u, $u \circ \phi = (u_{\phi(n)})_{n \geq 0}$. Cela revient à sélectionner, **dans l'ordre**, certains termes de la suite u.

Proposition 22. *Si une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ alors toute sous-suite de $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l.*

Démonstration. Soit ϕ une extraction, i.e. une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Comme u est convergente, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - l| < \varepsilon.$$

Comme ϕ est strictement croissante à valeur dans $\mathbb{N}$, elle vérifie (le prouver par récurrence)

$$\forall n \geq 0, \quad \phi(n) \geq n.$$

On a donc pour tout $n \geq N$, $\phi(n) \geq n \geq N$ et donc, d'après la définition de N :

$$\forall n \geq N, \quad |u_{\phi(n)} - l| < \varepsilon.$$

□

On a vu qu'il pouvait être délicat de montrer, directement à partir de la définition de la convergence, qu'une suite n'a pas de limite. Cette proposition nous fournit un bon moyen pour le prouver. En effet, **si on peut trouver deux sous-suites de u convergeant respectivement vers deux limites distinctes alors u n'a pas de limite.**

Revenons à l'exemple de la suite définie par $u_n = ((-1)^n)_{n\geq 0}$ pour tout $n \geq 0$. On considère d'abord l'extraction ϕ définie par $\phi(n) = 2n$ pour tout $n \geq 0$, qui ne retient que les termes pairs de u. La suite $(u_{2n})_{n\geq 0}$ est la suite constante égale à 1 et elle converge vers 1. Par ailleurs l'extraction ψ définie par $\psi(n) = 2n+1$ pour tout $n \geq 0$ ne retient que les termes impairs de u. La suite extraite $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ est la suite constante égale à -1 et converge vers -1. On en déduit que u n'a pas de limite.

3.7 Existence de limite

On déjà vu qu'il existe des suites n'ayant pas de limite. On s'intéresse dans cette partie à des conditions qui assurent l'existence d'une limite. Cette liste n'est bien sûr pas exhaustive !

Théorème 4 (Monotonie). *Toute suite croissante majorée est convergente.*

Il existe bien sûr un résultat analogue pour les suites décroissantes minorées. On peut résumer les deux résultats en disant que **toute suite monotone bornée est convergente**.

Démonstration. Soit u une suite réelle croissante majorée. L'ensemble $\{u_n,\ n \geq 0\}$ est non vide et majoré donc, d'après la propriété de la borne supérieure (Théorème 2), cet ensemble admet une borne supérieure. On la note M. Nous allons montrer que u converge vers M.
Soit $\varepsilon > 0$. La définition de la borne supérieure nous assure qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq M - \varepsilon$. Comme u est croissante,

$$\forall n \geq N, \quad u_n \geq u_N \geq M - \varepsilon.$$

Par ailleurs, M est un majorant de $\{u_n,\ n \geq 0\}$ donc pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq M$. Finalement

$$\forall n \geq N, \quad M - \varepsilon \leq u_n \leq M.$$

Ce qui implique

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - M| \leq \varepsilon.$$

□

Comme une suite croissante non majorée diverge vers l'infini (voir la feuille d'exercices), on en déduit qu'une suite croissante a seulement deux comportements asymptotiques possibles : soit elle est majorée et elle converge, soit elle n'est pas majorée et elle diverge alors vers l'infini.

Théorème 5 (Encadrement)**.** *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ *et* $(w_n)_{n\geq 0}$ *trois suites telles que*

$$\forall n \geq 0, \quad u_n \leq v_n \leq w_n.$$

On suppose de plus que $(u_n)_{n\geq 0}$ *et* $(w_n)_{n\geq 0}$ *convergent vers un réel* l*. Alors* $(v_n)_{n\geq 0}$ *converge également vers* l*.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. La définition de la convergence nous assure l'existence de $N_1 \in \mathbb{N}$(resp. $N_2 \in \mathbb{N}$) tel que

$$\forall n \geq N_1 \ (resp.\ N_2), \quad |u_n - l| \leq \varepsilon \qquad (resp.\ |w_n - l| \leq \varepsilon).$$

On pose $N = \max\{N_1, N_2\}$, et on obtient

$$\forall n \geq N, \quad l - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq l + \varepsilon.$$

Ce qui conclut la preuve. □

Théorème 6 (Suites adjacentes)**.** *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *et* $(v_n)_{n\geq 0}$ *deux suites réelles telles que*

1. *u est croissante et v est décroissante*
2. *la suite $v - u$ converge vers* 0*.*

Alors il existe un réel l *tel que* $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = l$ *et*

$$\forall n \geq 0, \quad u_n \leq l \leq v_n.$$

Quand deux suites u et v satisfont 1. et 2., on dit qu'elles sont **adjacentes**.

Démonstration. La suite $v - u$ est décroissante et converge vers 0, on en déduit qu'elle est positive. Donc

$$\forall n \geq 0, \quad v_0 \geq v_n \geq u_n.$$

On en déduit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est majorée (par v_0). Comme u est également croissante, on en déduit, d'après le Théorème 4, qu'elle converge vers un réel l. La convergence de v vers l s'obtient grâce à 2. et au Corollaire 3.
Enfin, on a vu dans la preuve du Théorème 4 que

$$l = \sup\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \inf\{v_n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

On en déduit que

$$\forall n \geq 0, \quad u_n \leq l \leq v_n.$$

□

Théorème 7 (Bolzano-Weierstrass)**.** *De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration. On va réaliser une preuve par dichotomie. Ce n'est peut-être pas la plus rapide (nous verrons en exercice une preuve plus courte) mais elle est assez pédagogique car elle permet de bien comprendre ce qu'il se passe.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée. Il existe donc a et b respectivement minorant et majorant de u. On pose $I_0 = [a, b]$ et

$$a_0 = a,\ \ b_0 = b \text{ et } m_0 = (a+b)/2.$$

On définit les sous-ensembles de $\mathbb{N}$

$$D_0 = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_n \in [m_0, b_0]\} \text{ et } G_0 = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_n \in [a_0, m_0]\}.$$

Comme pour tout $n \geq 0$, $a \leq u_n \leq b$, on a

$$\mathbb{N} = D_0 \cup G_0.$$

Comme $\mathbb{N}$ est de cardinal infini, au moins un des deux ensembles D_0 ou G_0 est infini. On définit donc a_1 et b_1 par

- $a_1 = a_0$ et $b_1 = m_0$ si $Card(G_0) = +\infty$ et $Card(D_0) < +\infty$
- $a_1 = m_0$ et $b_1 = b_0$ sinon.

On remarque que le second cas couvre exactement deux situations : celle où D_0 et G_0 sont tous deux infinis et celle où D_0 est infini et G_0 est fini. On appelle $I_1 := [a_1, b_1]$. On pose $\phi(0) = 0$ et

$$\phi(1) = \min\{j > \phi(0) \text{ tel que } u_j \in I_1\}.$$

Le minimum considéré ci-dessus est bien défini puisqu'il s'agit du minimum d'un ensemble non vide de $\mathbb{N}$.
On itère cette construction. Soit $n \geq 1$. Supposons que l'on ait construit une famille d'intervalles $(I_k)_{0\leq k\leq n} = ([a_k, b_k])_{0\leq k\leq n}$ telle que

- $\forall\ k \leq n,\quad b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$.
- Pour tout $k \leq n$, l'intervalle I_k contient une infinité de termes de la suite :

$$\forall\ k \leq n, \quad Card(\{j \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_j \in I_k\}) = +\infty.$$

- $\forall\ k \in \{1, \cdots, n\}, \quad a_k \geq a_{k-1}$ et $b_k \leq b_{k-1}$.

On a par ailleurs défini $(\phi(0), \cdots \phi(n))$ par $\phi(0) = 0$ et

$$\forall k \leq n, \quad \phi(k) = \min\{j > \phi(k-1) \text{ tel que } u_j \in I_k\}.$$

On pose alors $m_n = (a_n + b_n)/2$, le milieu de I_n. On définit

$$D_n = \{j \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_j \in [m_n, b_n]\} \text{ et } G_n = \{j \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_j \in [a_n, m_n]\}.$$

On a

$$\{j \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_j \in I_n\} = D_n \cup G_n.$$

Comme le cardinal de l'ensemble de gauche est infini, au moins un des deux ensembles D_n ou G_n est infini. On définit donc a_{n+1} et b_{n+1} par

- $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$ si $Card(G_n) = +\infty$ et $Card(D_n) < +\infty$
- $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$ sinon.

Comme précédemment, le second cas couvre exactement deux situations : celle où D_n et G_n sont tous deux infinis et celle où D_n est infini et G_n est fini. On appelle $I_{n+1} := [a_{n+1}, b_{n+1}]$. On vérifie que

- $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{b-a}{2^{n+1}}$
- $Card(\{j \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_j \in I_{n+1}\}) = +\infty$.
- $a_{n+1} \geq a_n$ et $b_{n+1} \leq b_n$.

Enfin, on définit

$$\phi(n+1) = \min\{j > \phi(n) \text{ tel que } u_j \in I_{n+1}\},$$

où ce minimum est bien défini comme minimum d'un ensemble non vide de $\mathbb{N}$. Par construction de ϕ, il s'agit d'une extraction (i.e. d'une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$). Il reste à vérifier que $(u_{\phi(n)})_{n\geq 0}$ est convergente.

On note tout d'abord que, toujours par construction, les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes. On en déduit, d'après le Théorème 6, qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = l.$$

Enfin, pour tout $n \geq 0$, $u_{\phi(n)} \in I_n$ donc

$$\forall n \geq 0, \quad a_n \leq u_{\phi(n)} \leq b_n.$$

En utilisant le théorème d'encadrement (Théorème 5), on en déduit que $(u_{\phi(n)})_{n\geq 0}$ converge vers l. □

Chapitre 4

Fonctions réelles

On traite dans ce chapitre des fonctions réelles. Nous allons cependant utiliser de nombreuses propriétés qui ne sont pas spécifiques au cas réel mais qui relèvent de la théorie des applications. Il est donc important de relire et comprendre le Chapitre 3 *Applications* de votre cours d'Algèbre.

4.1 Définitions

Une **fonction** f est la donnée de trois objets :

- un **ensemble de départ** ou **ensemble de définition** $\mathcal{D}$,
- un **ensemble d'arrivée** F,
- un **mécanisme fonctionnel** (ou **relation fonctionnelle**) qui associe à tout élément x de $\mathcal{D}$ un **unique** élément $f(x)$ de F.

On utilise la notation suivante pour résumer ces informations :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathcal{D} & \to & F \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

On dit aussi que f est **définie sur** $\mathcal{D}$ pour indiquer que l'ensemble de définition est $\mathcal{D}$ et que f est **à valeurs dans** F pour indiquer que l'ensemble d'arrivée est F. Pour tout élément $x \in \mathcal{D}$, on appelle $f(x)$ **l'image de** x **par** f. On appelle **image de** f l'ensemble des images des éléments de $\mathcal{D}$ par f c'est-à-dire

$$f(\mathcal{D}) = Im(f) = \{y \in F \text{ tel que } \exists x \in \mathcal{D} \text{ vérifiant } f(x) = y\}.$$

Pour tout $y \in Im(f)$, on dit que x est **antécédent de** y si $f(x) = y$. On notera bien que, par définition même de ce qu'est une fonction, un élément de $\mathcal{D}$ a une unique image. En revanche, un élément de $Im(f)$ peut avoir plusieurs antécédents.

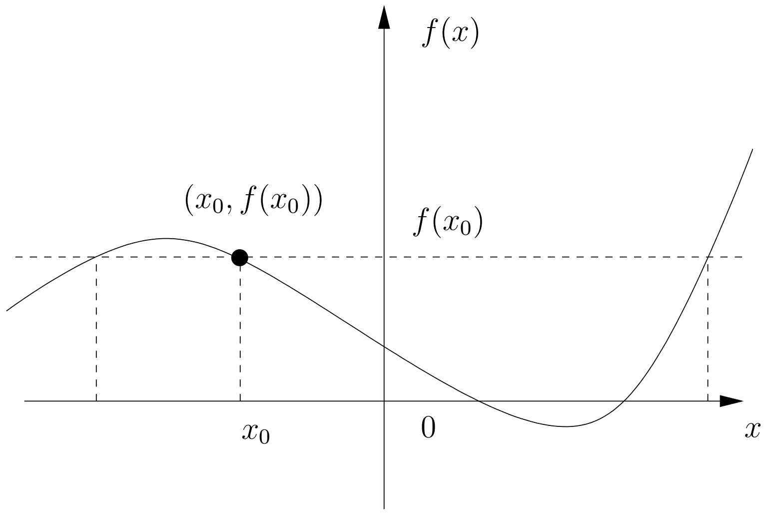

FIGURE 4.1: Graphe d'une fonction f et image d'un point $x_0 \in \mathcal{D}$. On note que $f(x_0)$ a plusieurs antécédents.

Dans ce chapitre, on étudie les fonctions réelles de la variable réelle, c'est-à-dire le cas où $\mathcal{D}$ et F sont $\mathbb{R}$ ou des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Considérons comme premier exemple la fonction

$$\begin{array}{rcrcl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Son domaine de définition est $\mathbb{R}$, son ensemble d'arrivée est également $\mathbb{R}$ et son image est $\mathbb{R}^+$ (car un carré est toujours positif). L'image de 2 est 4. Le réel 9 a deux antécédents : 3 et -3.

Le **graphe** d'une fonction permet de la représenter géométriquement :

Définition 15. *Le graphe d'une fonction f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$*

$$Graph(f) = \{(x, f(x)),\ x \in \mathcal{D}\}.$$

Si f est une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{D}$, on peut considérer la **restriction** de f à $\mathcal{E}$ notée $f_{|\mathcal{E}}$ et définie par

$$\begin{array}{rcrcl} f_{|\mathcal{E}} & : & \mathcal{E} & \to & F \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

On dit parfois qu'une fonction a telle ou telle propriété sur $\mathcal{E}$: cela signifie en fait que sa restriction à $\mathcal{E}$ possède la propriété en question. Par exemple, la

fonction carré que l'on vient de considérer est croissante sur $\mathbb{R}^+$ bien qu'elle ne soit pas croissante sur $\mathbb{R}$.
On voit sur cet exemple que l'expression "la fonction carré" est ambigüe. Elle identifie une fonction à son mécanisme fonctionnel sans préciser son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée qui sont pourtant des éléments essentiels de sa définition. En fait les fonctions

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

sont bien deux fonctions différentes même si leurs mécanismes fonctionnels sont les mêmes.

4.2 Propriétés remarquables

Commençons par la monotonie :

Définition 16 (Monotonie)**.** *On dit que $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est*
— *croissante si*

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$

— *strictement croissante si*

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, \quad x < y \implies f(x) < f(y)$$

— *décroissante si*

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, \quad x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$$

— *strictement décroissante si*

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, \quad x < y \implies f(x) > f(y)$$

Un autre exemple : la fonction $x \mapsto E(x)$ (voir Figure 1.1) est constante par morceaux et croissante sur son domaine $\mathbb{R}$.

Définition 17. *On dit que f définie sur un domaine $\mathcal{D}$ est*
— *majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que,*

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leq M.$$

On dit alors que M est un majorant de f.

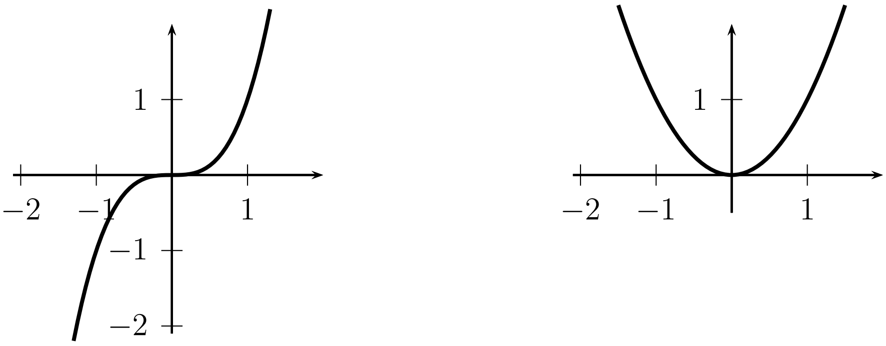

FIGURE 4.2: La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3$ (graphe de gauche) est strictement croissante sur son domaine. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$ (graphe de droite) est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

— *minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que,*

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \geq m.$$

On dit alors que m est un minorant de f.

— *bornée si elle est à la fois majorée et minorée.*

La caractérisation suivante pour les fonctions bornées est très utile :

Proposition 23. *Une fonction f définie sur un domaine $\mathcal{D}$ est bornée si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que,*

$$\forall x \in \mathcal{D}, \qquad |f(x)| \leq M.$$

La preuve est laissée en exercice.

Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$ est minorée (0, -1 sont par exemple des minorants) mais pas majorée. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto e^{-x^2}$ est à la fois majorée et minorée ; elle est donc bornée.

Lorsqu'ils existent, on définit **supremum**, **infimum**, **maximum** et **minimum** d'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned}
\sup\ f &= \sup_{x\in\mathcal{D}}\ f(x) = \sup\{f(x),\ x \in \mathcal{D}\} = \sup\ Im(f)\\
\inf\ f &= \inf_{x\in\mathcal{D}}\ f(x) = \inf\{f(x),\ x \in \mathcal{D}\} = \inf\ Im(f)\\
\max\ f &= \max_{x\in\mathcal{D}}\ f(x) = \max\{f(x),\ x \in \mathcal{D}\} = \max\ Im(f)\\
\min\ f &= \min_{x\in\mathcal{D}}\ f(x) = \min\{f(x),\ x \in \mathcal{D}\} = \min\ Im(f)
\end{aligned}$$

On définit aussi la notion d'extremum (global) et d'extremum local de la façon suivante :

Définition 18 (Extremum / Extremum local)**.** *Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}$ et $x \in \mathcal{D}$. On dit que f a*

- *un maximum (global) en x si : $\forall y \in \mathcal{D},\ f(y) \leq f(x)$*
- *un minimum (global) en x si : $\forall y \in \mathcal{D},\ f(y) \geq f(x)$*
- *un maximum local en x s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$\forall y \in \mathcal{D} \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[,\ f(y) \leq f(x)$$

- *un minimum local en x s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$\forall y \in \mathcal{D} \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[,\ f(y) \geq f(x)$$

On appelle extremum (resp. extremum local) un maximum (resp. maximum local) ou un minimum (resp. minimum local).

Il est évident d'après la définition qu'un maximum global est aussi un maximum local. La réciproque, par contre, n'est pas vraie "en général". La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$ a un minimum global et local en 0. En revanche, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 1 - 3x^2 + x^4$ a un maximum local en 0 qui n'est pas un maximum global (voir Figure 4.3).

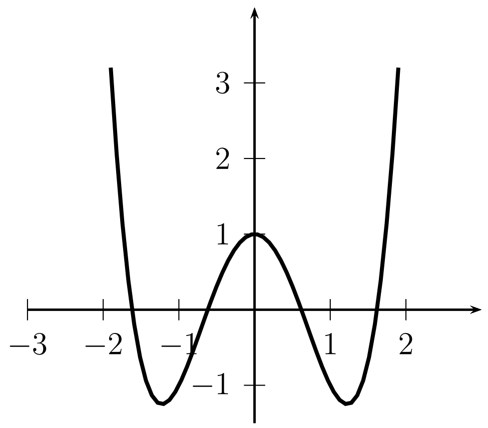

FIGURE 4.3: Graphe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 1 - 3x^2 + x^4$. Cette fonction admet en 0 un maximum local non global.

Définition 19. *Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est dite **périodique** s'il existe $T > 0$ tel que*

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad x + T \in \mathcal{D} \text{ et } f(x + T) = f(x).$$

Par exemple, les fonctions cosinus et sinus définies sur $\mathbb{R}$ sont périodiques de période 2π (voir Figure 4.4).

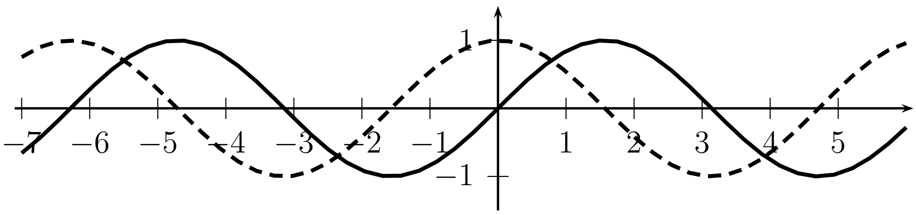

FIGURE 4.4: Les graphes des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \sin(x)$ (en trait plein) et $x \mapsto \cos(x)$ (en pointillés).

Voici maintenant un rappel de notions très importantes que vous avez vues en cours d'algèbre (Chapitre 3.3) :

Définition 20. *Une fonction f définie sur un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $F \subset \mathbb{R}$ est*

— ***injective*** *si,*

$$\forall (x, x') \in \mathcal{D}^2, \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$$

— ***surjective*** *si pour tout y appartenant à F, il existe x appartenant à $\mathcal{D}$ tel que $f(x) = y$ i.e.*

$$\forall y \in F \quad \exists x \in \mathcal{D} \text{ tel que } f(x) = y.$$

— ***bijective*** *si elle est à la fois injective et surjective c'est-à-dire si pour pour tout y appartenant à F, il existe un unique x appartenant à $\mathcal{D}$ tel que $f(x) = y$ i.e.*

$$\forall y \in F \quad \exists! x \in \mathcal{D} \text{ tel que } f(x) = y.$$

On peut, de manière équivalente, dire que f est surjective si l'image de f est F, $Im(f) = F$. La proposition suivante peut vous aider à mieux comprendre ou retenir les définitions que l'on vient de donner.

Proposition 24. *Une fonction f définie sur un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $F \subset \mathbb{R}$ est*

- *injective si, pour tout y appartenant à F, l'équation, d'inconnu x, $y = f(x)$ a **au plus** une solution dans $\mathcal{D}$.*
- *surjective si, pour tout y appartenant à F, l'équation, d'inconnu x, $y = f(x)$ a **au moins** une solution dans $\mathcal{D}$.*
- *bijective si, pour tout y appartenant à F, l'équation, d'inconnu x, $y = f(x)$ a **exactement** une solution dans $\mathcal{D}$.*

Il est important pour ces notions de bien préciser le domaine de définition $\mathcal{D}$ ainsi que le domaine d'arrivée F de la fonction considérée. Reprenons l'exemple de la fonction

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathcal{D} & \to & F \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Si $\mathcal{D} = \mathbb{R}^+$ et $F = \mathbb{R}^+$, f est bijective.
Si $\mathcal{D} = \mathbb{R}^+$ et $F = \mathbb{R}$, f est injective et n'est pas surjective.
Si $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}^+$, f n'est pas injective mais est surjective.
Si $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$, f n'est ni injective ni surjective.
On voit de nouveau, sur cet exemple, qu'il est impératif de bien préciser les ensembles de départ et d'arrivée d'une fonction. La relation fonctionnelle seule ne permet pas de déterminer si une fonction est injective, surjective ou bijective.

Proposition 25. *Toute fonction strictement monotone est injective.*

Démonstration. On peut supposer sans perdre de généralité que f est strictement croissante. Soit x et y deux points distincts du domaine de f. On peut supposer que $x < y$. Comme f est strictement croissante, on en déduit que $f(x) < f(y)$ et donc $f(x) \neq f(y)$. $\square$

Attention : la proposition précédente ne dit rien sur l'image de f. On énoncera un peu plus loin (Proposition 38) un résultat plus complet sous des hypothèses plus fortes.
On dit qu'un domaine $\mathcal{D}$ est **symétrique** si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{D} \implies -x \in \mathcal{D}.$$

Définition 21. *Soit f une fonction définie sur un domaine symétrique $\mathcal{D}$. On dit que f est*

- ***paire** si :*

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(-x) = f(x)$$

- ***impaire** si :*

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(-x) = -f(x)$$

Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et celui d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine. Pour un exemple, on peut se reporter de nouveau à la Figure 4.2 où l'on voit, à gauche, le graphe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$ qui est paire et, à droite, le graphe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3$ qui est impaire.

4.3 Opérations sur les fonctions et bijection réciproque

Commençons par les opérations algébriques

Définition 22 (Opérations sur les fonctions)**.** *Soit f et g deux fonctions ayant le même domaine $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit alors les fonctions suivantes sur le domaine $\mathcal{D}$:*

— $\forall x \in \mathcal{D}, \qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

— $\forall x \in \mathcal{D}, \qquad (fg)(x) = f(x)g(x)$

— $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D} \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

— *Si pour tout $x \in \mathcal{D}, f(x) \neq 0$ on définit, $\forall x \in \mathcal{D}, \quad (\frac{1}{f})(x) = \frac{1}{f(x)}$.*

Définition 23 (Composition)**.** *Soit E, F, G et H des ensembles avec $F \subset G$. Soit f une fonction de E dans F et g une fonction de G dans H. On définit la **composée** $g \circ f$ par*

$$g \circ f \; : \; \begin{array}{ccc} E & \to & H \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Proposition 26.

— *La composée de deux fonctions monotones de même sens est croissante*

— *La composée de deux fonctions monotones de sens contraire est décroissante*

— *La composée de deux fonctions injectives est injective*

— *Dans le cas où $F = G$, si f et g sont surjectives alors, $g \circ f$ est surjective*

— *La composée de deux fonctions bijectives est bijective*

Démonstration. Les preuves des deux premières propositions sont élémentaires et laissées en exercice.
Pour la troisième : Soit x et y dans E tels que $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Comme g est injective, on en déduit que $f(x) = f(y)$. Enfin comme f est également injective, on en déduit que $x = y$.

Pour la quatrième : Soit z appartenant à G. Comme g est surjective, il existe y appartenant à G tel que $g(y) = z$. Puis, comme $y \in F$ et f est surjective, il existe x appartenant à E tel que $f(x) = y$. On a donc bien trouvé $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$.
La dernière proposition est une conséquence des deux précédentes. □

Définition 24 (Fonction réciproque). *On considère une fonction bijective f de E dans F. On définit la fonction réciproque f^{-1} de F dans E qui à tout y dans F associe $f^{-1}(y)$ dans E, l'unique $x \in E$ tel que $f(x) = y$.*

Géométriquement, le graphe de f^{-1} est obtenu en prenant le symétrique du graphe de f par rapport à la première bissectrice, voir Figure 4.5.

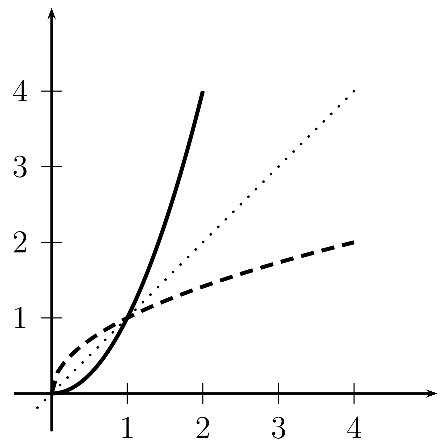

FIGURE 4.5: En trait plein la fonction $x \mapsto x^2$ qui définit une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, en pointillé sa réciproque $x \mapsto \sqrt{x}$ dont le graphe est obtenu par symétrie par rapport à la première bissectrice (en pointillés fins).

Proposition 27. *Soit f une bijection de E dans F alors f^{-1} est une bijection de F dans E, $(f^{-1})^{-1} = f$ et $f \circ f^{-1}$ est l'identité restreinte à F tandis que $f^{-1} \circ f$ est l'identité restreinte à E.*

Démonstration. Il n'y a ici rien de spécifique au cas des fonctions réelles et je vous renvoie donc pour cette preuve à la Proposition 3.4.3 du cours d'algèbre. □

Proposition 28. *Soit f une bijection de E dans F et g une bijection de F dans G. Alors $g \circ f$ est une bijection de E dans G et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Démonstration. De nouveau je vous renvoie à la Proposition 3.4.3 du cours d'algèbre. □

4.4 Limites en un point de l'adhérence du domaine

Définition 25 (Adhérence). *On définit l'adhérence d'un domaine $\mathcal{D}$ comme l'ensemble des limites de suites à valeurs dans $\mathcal{D}$:*

$$\overline{\mathcal{D}} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel qu'il existe } (y_n)_{n\geq 0} \text{ à valeurs dans } \mathcal{D} \text{ convergeant vers } x\}$$

Si x appartient à $\mathcal{D}$ alors x appartient à $\overline{\mathcal{D}}$. En effet la suite constante égale à x est bien à valeurs dans $\mathcal{D}$ et converge vers x. D'où

$$\mathcal{D} \subset \overline{\mathcal{D}}.$$

Proposition 29. *Un point x appartient à l'adhérence d'un domaine $\mathcal{D}$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap\mathcal{D}$ est non vide.*

Démonstration. On commence par montrer le sens direct. Soit $x \in \overline{\mathcal{D}}$ et $\varepsilon > 0$. Par définition de l'adhérence, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{D}$ convergeant vers x. Par définition de la convergence, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad |x_n - x| < \varepsilon.$$

En particulier $x_N \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap\mathcal{D}$ qui n'est donc pas vide.
Réciproquement : soit x tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap\mathcal{D}$ soit non vide. Pour tout $n \geq 1$, il existe donc un réel $x_n \in \mathcal{D}$ tel que $x - 1/n < x_n < x + 1/n$. On en déduit par le théorème d'encadrement (Théorème 5) que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers x. On a donc bien construit une suite à valeurs dans $\mathcal{D}$ convergeant vers x. $\square$

L'adhérence d'un intervalle ouvert est l'intervalle fermé correspondant. Ainsi l'adhérence de $[-1,1[$ est $[-1,1]$. L'adhérence de $\mathbb{R}^*$ est $\mathbb{R}$. On déduit par ailleurs facilement de la Proposition 11 et de la Proposition 29 que l'adhérence de $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$.

Comme pour la convergence des suites, la définition suivante est l'une des plus importantes de l'année :

Définition 26. *Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}$ et $x \in \overline{\mathcal{D}}$. On dit que f converge vers $l \in \mathbb{R}$ en x si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \quad \textit{tel que} \quad \forall y \in]x-\alpha, x+\alpha[\cap\mathcal{D}, \quad |f(y) - l| < \varepsilon.$$

On trouvera souvent la définition suivante qui est uniquement une écriture différente :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall y \in \mathcal{D}, \quad |y - x| < \alpha \implies |f(y) - l| < \varepsilon.$$

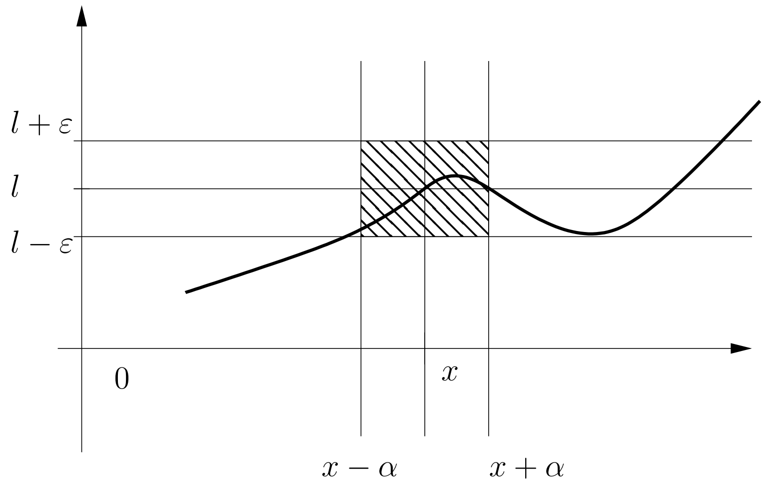

FIGURE 4.6: Graphe d'une fonction convergeant vers l en x.

Comme dans la définition des limites de suites, on peut remplacer les inégalités strictes par des inégalités larges sans que cela ne modifie la définition. C'est d'ailleurs également le cas pour toutes les définitions de limites que l'on considèrera dans ce chapitre. On utilisera donc selon les cas la version la plus adaptée à ce que l'on veut prouver.
Au lieu de "f converge vers l", on dit parfois que "l est la limite de f en x", que "f tend vers l en x", ou encore que "$f(y)$ tend vers l quand y tend vers x". On note, $\lim_{y\to x} f(y) = l$. On prendra soin par contre de ne jamais écrire $\lim_{y\to x} f(y)$ avant de s'être assuré qu'une telle limite existe.
Intuitivement : aussi petit que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\alpha > 0$, dépendant de ε et de x, tel que les images des points α - proches de x soient ε - proches de l. Géométriquement (voir Figure 4.6), pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir $\alpha > 0$ tel que la partie du graphe correspondant aux points à distance inférieure à α de x soit dans la bande horizontale de largeur 2ε centrée en l.
Il faut se rappeler que la fonction valeur absolue définit une distance sur $\mathbb{R}$ par $d(x,y) = |x-y|$, pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On peut réécrire la définition d'une limite de la façon suivante

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall y \in \mathcal{D}, \quad d(x,y) < \alpha \implies d(f(y),l) < \varepsilon.$$

Montrons par exemple que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$ admet une limite en tout point de son domaine. Plus précisément, montrons que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} x^2 = x_0^2$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Il s'agit de trouver α tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - x_0| \leq \alpha \implies |x^2 - x_0^2| \leq \varepsilon.$$

On remarque pour cela que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x^2 - x_0^2| = |x - x_0|\ |x + x_0| \leq |x - x_0|(|2x_0| + |x - x_0|).$$

On pose $\alpha = \min(1, \varepsilon/(1 + 2|x_0|))$. On vérifie alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| \leq \alpha$ implique $|x^2 - x_0^2| \leq \varepsilon$.
On voit sur cet exemple pourtant simple que la définition de la convergence est parfois difficile à manier. Heureusement nous verrons, en étudiant la continuité, une large classe de fonctions pour lesquelles le calcul de limites est immédiat.

Remarque 4. *Si x appartient à $\mathcal{D}$ alors pour tout $\alpha > 0$, x appartient à $]x - \alpha, x + \alpha[\cap\mathcal{D}$ et on en déduit donc que si f converge vers un réel l en x alors $l = f(x)$. La seule limite possible en un point x du domaine est donc $f(x)$. On fera donc bien la différence entre les fonctions*

$$\begin{array}{rcll} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 1 \ si\ x \neq 0 \\ 0 \ si\ x = 0 \end{cases} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcll} g & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & 1 \end{array}$$

La fonction f n'a pas de limite en 0 alors que g a pour limite 1 en $0 \in \overline{\mathbb{R}^*}$. Nous verrons que cela permet de définir un prolongement par continuité de g.

Comme c'était le cas pour les suites, il y a, pour les fonctions également, unicité de la limite :

Proposition 30. *Si une fonction converge vers deux réels l et l' en un point de l'adhérence de son domaine alors $l = l'$.*

La preuve est laissée en exercice.
Il est utile de définir également les notions de limite à droite et limite à gauche.

Définition 27. *Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}$ et x un point de $\overline{\mathcal{D}}$. On dit que f converge à droite (resp . à gauche) vers $l \in \mathbb{R}$ en x si*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\alpha > 0 \ \text{ tel que } \ \forall y \in]x, x+\alpha[\cap\mathcal{D} \ (\text{resp. }]x-\alpha, x[\cap\mathcal{D}), \quad |f(y)-l| < \varepsilon.$$

Lorsque une fonction f a une limite à droite (resp. à gauche) en x, on la notera $f(x^+)$ (resp. $f(x^-)$). On fera bien attention que dans cette définition, et contrairement à la définition de limite (voir Remarque 4), il n'y a aucune condition sur le point x et sur son image $f(x)$ (définie dans le cas $x \in \mathcal{D}$). Ainsi, si la fonction f est définie en x, les limites à droite ou à gauche (si elles existent) peuvent être différentes de $f(x)$. Les deux fonctions f et g dans la Remarque 4 ont ainsi mêmes limites à droite et à gauche en 0 (à savoir 1). Les notions de limites à droite et à gauche sont indépendantes de l'existence d'une image pour x et, si elle existe, de la valeur de cette image.

Proposition 31. *Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ a pour limite l en $x \in \overline{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D}$ si et seulement si elle a pour limite l à droite et à gauche en x.*
Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ a pour limite l en $x \in \mathcal{D}$ si et seulement si elle a pour limite l à droite et à gauche en x ***et*** *$f(x) = l$.*

Démonstration. Commençons par la première partie. Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction et $x \in \overline{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D}$. On suppose que f converge à droite et à gauche en x vers un même réel l. Montrons que f tend vers l en x. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite à droite et à gauche, il existe $\alpha^+ > 0$ (resp. $\alpha^- > 0$) tel que

$$\forall y \in]x, x + \alpha^+[\cap \mathcal{D} \text{ (resp. }]x - \alpha^-, x[\cap \mathcal{D}), \quad |f(y) - l| < \varepsilon.$$

On pose $\alpha = \min\{\alpha^+, \alpha^-\} > 0$. On a alors

$$\forall y \in]x - \alpha, x + \alpha[\cap \mathcal{D}, \quad |f(y) - l| < \varepsilon \qquad (*)$$

et x ne pose pas de problème dans cette proposition puisque $x \notin \mathcal{D}$.
Réciproquement, si f converge vers l, il suffit d'écrire les définitions pour voir que f converge à gauche et à droite en x vers l.
Pour la seconde partie, la preuve directe est la même jusqu'à $(*)$. Il faut alors prêter attention au fait que x satisfait bien $|f(x) - l| < \varepsilon$ et c'est bien le cas puisqu'on a l'hypothèse $f(x) = l$. La réciproque est la même que dans le premier cas. □

Ainsi la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1$ si $x > 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$ n'a pas de limite en 0. En effet, $\lim_{y \to 0^+} f(y) = 1$ alors que $\lim_{y \to 0^-} f(y) = -1$.
Autre exemple : la fonction partie entière (voir Figure 1.1) a des limites à droite et à gauche en tous points de $\mathbb{R}$ mais n'a en revanche pas de limite aux points entiers. En effet, si $n \in \mathbb{N}$ alors $\lim_{y \to n^+} E(y) = n$ alors que

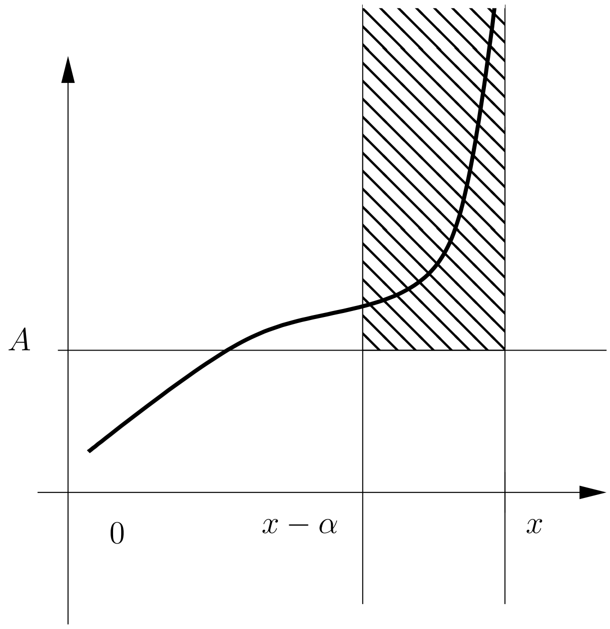

FIGURE 4.7: Exemple de limite infinie à gauche en x. Etant donné un nombre $A > 0$ (qu'il faut penser arbitrairement grand) les valeurs de $f(y)$ sont supérieures à A si y est assez proche de x (à distance inférieure à $\alpha > 0$ dépendant de A et x).

$\lim_{y \to n^-} E(y) = n - 1$.

On s'intéresse maintenant à la notion de limite infinie en un point de l'adhérence.

Définition 28. *Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}$ et $x \in \overline{\mathcal{D}}$. On dit que f tend vers $+\infty$ en x si*

$$\forall A > 0, \quad \exists \alpha > 0 \quad \textit{tel que} \quad \forall y \in]x-\alpha, x+\alpha[\cap \mathcal{D}, \quad f(y) \geq A.$$

Remarque 5. *On note que la définition précédente implique que $x \notin \overline{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D}$.*

On se reportera à la Figure 4.7 pour illustrer cette définition. On a une définition équivalente pour exprimer que f tend vers $-\infty$ et on peut définir les notions de limite à droite et limite à gauche comme dans le cas où la limite est finie. Par exemple, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ a pour limite à droite en 0, $+\infty$ et à gauche en 0, $-\infty$.

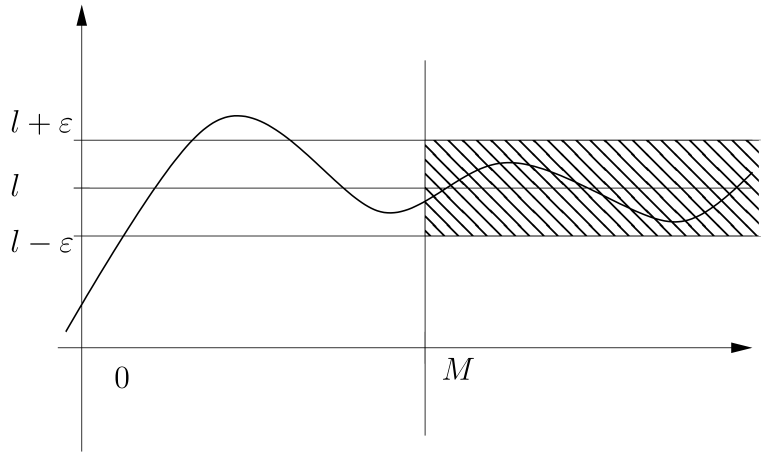

FIGURE 4.8: Graphe d'une fonction convergeant vers l à l'infini.

4.5 Limites à l'infini

Lorsque le domaine de définition $\mathcal{D}$ n'est pas borné, on peut définir les limites à l'infini.

Définition 29. *Soit f une fonction dont le domaine $\mathcal{D}$ n'est pas majoré et l un réel. Alors on dit que f converge vers l en $+\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0 \text{ tel que } \forall x \in [M, +\infty[\cap \mathcal{D}, \quad |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On se reportera à la Figure 4.8 pour une illustration. Il existe une définition analogue pour les limites en $-\infty$ d'un domaine qui n'est pas minoré.

Montrons que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ converge vers 0 à l'infini. Soit $\varepsilon > 0$. On cherche M tel que : $\forall y \geq M$, $|1/y^3| < \varepsilon$. On pose $M = 2\varepsilon^{-1/3}$ et la vérification est immédiate.

On aborde enfin la définition de limite infinie à l'infini.

Définition 30. *Soit f une fonction dont le domaine $\mathcal{D}$ n'est pas majoré. On dit que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si*

$$\forall A > 0,\ \exists M > 0 \text{ tel que } \forall x \in [M, +\infty[\cap \mathcal{D}, \quad f(x) \geq A.$$

On se reportera à la Figure 4.9 pour une illustration de cette définition. Il existe aussi une définition analogue pour tendre vers $-\infty$ ainsi que pour le cas où le domaine n'est pas minoré et la limite considérée en $-\infty$. Par exemple, on peut montrer que $\lim_{y\to-\infty} -ln(-y) = -\infty$.

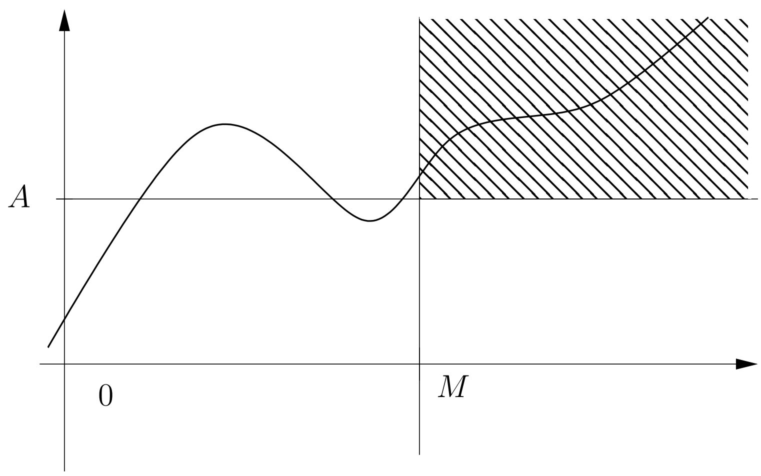

FIGURE 4.9: Soit $A \in \mathbb{R}$ arbitrairement grand. En choisissant M assez grand, la sous-partie du graphe $\{(x, f(x)),\ x \geq M\}$ est au-dessus de la droite $y = A$.

4.6 Caractérisation séquentielle

On vient de voir les notions de limites en des points de l'adhérence d'un domaine mais également, lorsque celui-ci n'est pas majoré, en $+\infty$ ou, lorsqu'il n'est pas minoré, en $-\infty$. Pour unifier les énoncés (comme celui qu'on va voir dans cette section), nous allons donc considérer que si le domaine n'est pas majoré $+\infty \in \overline{\mathcal{D}}$ et, s'il n'est pas minoré, $-\infty \in \overline{\mathcal{D}}$. Il s'agit d'une notation qui ne doit pas vous perturber : le but est uniquement de ne pas réécrire le même résultat pour une limite en un point de $\mathbb{R}$ puis en l'infini.

Le théorème suivant s'applique donc à tous les cas de limites que l'on a considérés jusqu'à maintenant :

Théorème 8 (Caractérisation séquentielle)**.** *Soit f une fonction réelle définie sur un domaine $\mathcal{D}$, $x \in \overline{\mathcal{D}}$ et $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors f a pour limite l en x si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $\mathcal{D}$ et convergeant vers x, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$.*

Démonstration. On se contente du cas où x et l appartiennent à $\mathbb{R}$. Les autres, très similaires, sont de bons exercices.
On commence par le **sens direct** : Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction convergeant vers $l \in \mathbb{R}$ en $x \in \overline{\mathcal{D}}$. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs dans $\mathcal{D}$ convergeant vers x. Notre but est de montrer que la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers l. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la fonction f converge en x vers l il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall y \in]x - \alpha, x + \alpha[\cap \mathcal{D}, |f(y) - l| < \varepsilon.$$

Par définition de la convergence de $(x_n)_{n\geq 0}$, il existe N tel que

$$\forall n \geq N, \quad |x_n - x| < \alpha.$$

On a donc

$$\forall n \geq N, \quad |f(x_n) - l| < \varepsilon$$

Pour montrer la **réciproque**, nous allons montrer la contraposée. Supposons donc que f ne converge pas vers l quand y tend vers x. Par définition de la convergence, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \alpha > 0, \exists y \in]x - \alpha, x + \alpha[\cap \mathcal{D} \text{ tel que } |f(y) - l| \geq \varepsilon.$$

On peut donc définir une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ en choisissant pour tout $n \geq 1$, un réel $x_n \in]x - 1/n, x + 1/n[\cap \mathcal{D}$ tel que $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$. La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge bien vers x par le théorème d'encadrement (Théorème 5) mais $(f(x_n))_{n\geq 0}$ ne converge pas vers l puisque pour tout $n \geq 1$, $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$. □

On peut formuler des versions de la caractérisation séquentielle pour les limites à droite et à gauche en ajoutant que les suites qui tendent vers x doivent de plus être à valeurs dans $]x, +\infty[$ pour la limite à droite et $]-\infty, x[$ pour la limite à gauche.
La caractérisation séquentielle est un outil important pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point (ou en l'infini). Il suffit pour cela d'exhiber deux suites convergeant vers ce point mais dont les suites images convergent vers des limites différentes.

4.7 Comparaison de limites

La définition suivante sera très pratique pour les énoncés des prochaines sections.

Définition 31 (Voisinage)**.** *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}$.*

- *On dit que l'ensemble $\mathcal{V}$ est un **voisinage** de $x \in \mathbb{R}$ s'il existe $\eta > 0$ tel que $]x - \eta, x + \eta[\subset \mathcal{V}$*
- *On dit que l'ensemble $\mathcal{V}$ est un **voisinage** de $+\infty$ s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $]A, +\infty[\subset \mathcal{V}$.*
- *On dit que l'ensemble $\mathcal{V}$ est un **voisinage** de $-\infty$ s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty, A[\subset \mathcal{V}$.*

Une propriété est dite vraie dans un voisinage de $x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x tel que la propriété soit vraie en tout point de $\mathcal{V}$.

Les propositions qui suivent dans cette section et la suivante peuvent être prouvées de différentes façons. On peut notamment utiliser la caractérisation séquentielle pour se ramener aux propositions sur les suites que l'on a déjà prouvées. Ca n'est pas l'option que l'on a retenue ici mais réécrire ces preuves en utilisant cette technique est un excellent exercice.

Proposition 32. *Soit f et g deux fonctions définies sur un domaine $\mathcal{D}$ et $x \in \overline{\mathcal{D}}$. On suppose qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x tel que*

$$\forall y \in \mathcal{V} \cap \mathcal{D}, \quad f(y) \leq g(y).$$

On suppose de plus qu'il existe $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $l' \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tel que f converge vers l en x et g converge vers l' en x. Alors $l \leq l'$ (avec la convention que si $l' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ vérifie $l' \geq +\infty$ alors $l' = +\infty$ et la convention analogue en $-\infty$).

Démonstration. On ne donne la preuve que dans le cas $l, l' \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ (relire les conventions adoptées pour $\overline{\mathcal{D}}$ au début de la section 4.6). On raisonne par l'absurde. Supposons donc que $l' < l$. On pose $\varepsilon = (l - l')/3$. D'après la définition de la convergence de f en x, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall y \in \mathcal{D} \cap]x - \alpha, x + \alpha[, \quad |f(y) - l| < \varepsilon.$$

De même, en utilisant la convergence de g, il existe $\alpha' > 0$

$$\forall y \in \mathcal{D} \cap]x - \alpha', x + \alpha'[, \quad |g(y) - l'| < \varepsilon.$$

D'après la définition d'un voisinage, il existe $\eta > 0$ tel que $]x - \eta, x + \eta[\subset \mathcal{V}$. On pose $\beta = \min\{\alpha, \alpha', \eta\}$. Comme $\beta > 0$ et x appartient à l'adhérence de $\mathcal{D}$, l'ensemble $\mathcal{D} \cap]x - \beta, x + \beta[$ est non vide. Soit z un réel dans cet ensemble. Ce réel z appartient à $\mathcal{D}$ et vérifie $|z - x| < \alpha$ donc $|f(z) - l| < \varepsilon$ ce qui implique

$$f(z) > l - \varepsilon.$$

Par ailleurs, $z \in \mathcal{D}$ et $|z - x| < \alpha'$ donc $|g(z) - l'| < \varepsilon$ ce qui implique

$$g(z) < l' + \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon = (l - l')/3$, on en déduit que $g(z) < f(z)$: ce qui est absurde car $z \in \mathcal{D} \cap]x - \eta, x + \eta[$ donc $z \in \mathcal{V} \cap \mathcal{D}$ et on en déduit $f(z) \leq g(z)$. □

Dans la proposition précédente, le fait d'avoir des inégalités strictes à la place des inégalités larges dans les comparaisons entre les fonctions ne nous aurait rien fait gagner sur la comparaison des limites. Par exemple, si on considère les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^4$ définie sur le domaine $\mathbb{R}^*$. Alors 0 appartient à l'adhérence du domaine et pour tout $y \in]-1,1[\setminus\{0\}$, on a l'inégalité stricte $y^4 < y^2$. Pourtant les limites des deux fonctions en $0 \in \overline{\mathbb{R}^*}$ sont égales toutes deux à 0. On n'a donc plus inégalité stricte pour les limites.

Proposition 33 (Encadrement)**.** *Soit f, g et h trois fonctions définies sur un domaine $\mathcal{D}$ et $x \in \overline{\mathcal{D}}$. On suppose qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x tel que*

$$\forall y \in \mathcal{V} \cap \mathcal{D}, \quad f(y) \leq g(y) \leq h(y).$$

On suppose de plus qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que f et h converge vers l en x. Alors g converge également en x et $\lim_{y \to x} g(y) = l$.

Démonstration. De nouveau, on se limite au cas où $x \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. La convergence de f et h en x nous assure l'existence de $\alpha > 0$ et $\alpha' > 0$ tel que pour tout $y \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} |y - x| < \alpha &\implies |f(y) - l| < \varepsilon \\ |y - x| < \alpha' &\implies |h(y) - l| < \varepsilon \end{aligned}$$

D'après la définition d'un voisinage, il existe $\eta > 0$ tel que $]x - \eta, x + \eta[\subset \mathcal{V}$. On pose $\beta = \min\{\alpha, \alpha', \eta\}$. On a bien $\beta > 0$ et

$$\forall y \in \mathcal{D}\cap]x - \beta, x + \beta[, \quad l - \varepsilon < f(y) \leq g(y) \leq h(y) < l + \varepsilon$$

et donc

$$\forall y \in \mathcal{D}\cap]x - \beta, x + \beta[, \quad |g(y) - l| < \varepsilon.$$

□

On dispose également d'un théorème analogue à celui sur les suites (voir Théorème 4) pour les fonctions monotones bornées.

Théorème 9. *Si f est croissante et majorée alors f converge vers un réel l en $+\infty$.*

La preuve est analogue à celle du Théorème 4. Comme pour les suites, si une fonction croissante est non majorée alors elle tend vers $+\infty$.

4.8 Opérations sur les limites

On peut réaliser sur les limites de fonctions les mêmes opérations que sur les limites de suites. Nous les résumons dans la proposition suivante :

Proposition 34 (Opérations sur les limites : somme, produit et inverse). *Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$ et $x \in \overline{\mathcal{D}}$. On suppose de plus que f converge vers $l \in \mathbb{R}$ en x et g converge vers $l' \in \mathbb{R}$ en x, alors*

$$\lim_{y \to x} (f+g)(y) = l + l',$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lim_{y \to x} \lambda f(y) = \lambda l$$
$$\lim_{y \to x} (fg)(y) = ll',$$

Si $l' \neq 0$,

$$\lim_{y \to x} \frac{f}{g}(y) = \frac{l}{l'}$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle de la Proposition 18. □

Comme pour les suites, nous allons avoir besoin d'un second théorème d'opérations pour traiter le cas des limites infinies.

Proposition 35 (Opérations sur les limites 2). *Soit f et g deux fonctions réelles définies sur un domaine $\mathcal{D}$ et $x \in \overline{\mathcal{D}}$*

— *Si $\lim_{y \to x} f(y) = +\infty$ et g est minorée au voisinage de x ou $\lim_{y \to x} g(y) = +\infty$ alors*
$$\lim_{y \to x} (f+g)(y) = +\infty.$$
— *Si $\lim_{y \to x} f(y) = +\infty$ et qu'il existe $a > 0$ tel que g est minorée par a (resp. majorée par $a < 0$) au voisinage de x alors*
$$\lim_{y \to x} (fg)(y) = +\infty. \qquad (resp. \ -\infty)$$
— *Si $\lim_{y \to x} f(y) = +\infty$ alors $1/f$ est bien définie au voisinage de x et*
$$\lim_{y \to x} \frac{1}{f}(y) = 0.$$
— *Si $\lim_{y \to x} f(y) = 0$ et que f ne s'annule pas sur un voisinage de x alors $1/f$ est bien définie au voisinage de x et*
$$\lim_{y \to x} \left| \frac{1}{f} \right| (y) = +\infty.$$
Si f est de signe constant dans un voisinage de x, on peut enlever la valeur absolue et la convergence a lieu vers l'infini du signe correspondant.

Démonstration. La preuve est similaire à celle de la Proposition 19. □

Les formes indéterminées auxquelles on risque d'être confronté sont les mêmes que pour les suites (voir Chapitre 3.4). Vous êtes donc invités à les réviser ! Le théorème suivant prolonge le Théorème 3 :

Théorème 10 (Croissances comparées)**.** *Pour tout $a \neq 0$, et $b, c \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{ax}|x|^b \ln^c |x| = \lim_{x\to\pm\infty} e^{ax}$$

Pour tout $b \neq 0$, et $c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} |x|^b \ln^c |x| = \lim_{x\to+\infty} |x|^b$$

Pour tout $b \neq 0$, et $c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0^+} x^b |\ln x|^c = \lim_{x\to 0^+} x^b$$

On a rajouté les limites en 0 et en $-\infty$ mais la morale reste la même : le comportement de la fonction est fixé en priorité par l'exponentielle, puis par la puissance et enfin par le logarithme. Une preuve de ce théorème est proposée dans la feuille d'exercices.

On dispose également d'un théorème pour composer les limites :

Proposition 36 (Opérations sur les limites : composition)**.** *Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$. On considère $x \in \overline{\mathcal{D}}$ et on suppose que f converge vers $u \in \overline{\mathbb{R}}$ en x. On considère par ailleurs une fonction g définie sur un domaine $\mathcal{E}$ telle que $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{E}$ et $u \in \overline{\mathcal{E}}$ et telle que g converge vers $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ en u. Alors $g \circ f$ converge en x et :*

$$\lim_{y\to x} (g \circ f)(y) = l.$$

Démonstration. On se limite au cas où $l \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}$ (les autres cas sont similaires). Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{v\to u} g(v) = l$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall v \in \mathcal{E}, \quad v \in]u-\alpha, u+\alpha[\implies |g(v) - l| \leq \varepsilon.$$

Comme $\lim_{y\to x} f(y) = u$, il existe $\alpha' > 0$ tel que

$$\forall y \in \mathcal{D}, \quad y \in]x-\alpha', x+\alpha'[\implies |f(y) - u| \leq \alpha.$$

En combinant ces deux points on obtient :

$$\forall y \in \mathcal{D}, \quad |y - x| \leq \alpha' \implies |f(y) - u| \leq \alpha \implies |g(f(y)) - l| \leq \varepsilon.$$

□

Chapitre 5

Continuité

5.1 Définition

La notion de **continuité** est essentielle : elle donne une première approche de la régularité d'une fonction.

Définition 32 (Continuité)**.** *Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction et x un point de ce domaine. On dit que f est continue en x si*

$$\lim_{y \to x} f(y) = f(x).$$

Quand f est continue en tout point de $\mathcal{D}$, on dit que f est continue sur $\mathcal{D}$. On dit aussi qu'elle est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathcal{D}$.

Remarque 6. *La continuité d'une fonction est une **propriété locale**. Une propriété $\mathcal{P}$ est locale si dire que f vérifie $\mathcal{P}$ signifie que f vérifie $\mathcal{P}$ en tous points de son domaine. Par exemple "être positif" est une propriété locale tandis que "être croissante" n'est pas une propriété locale.*

Comme on l'a vu à la Remarque 4, si une fonction admet une limite en $x \in \mathcal{D}$, celle-ci est nécessairement $f(x)$. Ce qui est en jeu ici est donc essentiellement l'existence de cette limite.

En utilisant le théorème de caractérisation séquentielle (Théorème 8), on obtient que f est continue en x si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $\mathcal{D}$ et convergeant vers x, la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$.

On déduit des exemples que l'on a vus au chapitre précédent que :

- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$ est continue sur son domaine.
- La fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue sur les intervalles ouverts $]n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$ mais pas en $n \in \mathbb{Z}$.

— La fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$, $x \mapsto 1_{\mathbb{Q}}(x)$ qui vaut 1 si $x \in \mathbb{Q}$ et 0 si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, n'est continue en aucun point.

Détaillons un peu ce dernier exemple : Soit $x \in \mathbb{R}$. On veut prouver que $1_{\mathbb{Q}}$ n'a pas de limite en x. Par densité des rationnels, il existe une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{Q}$ convergeant vers x. La suite $(f(u_n))_{n\geq 0}$ est constante égale à 1 et converge donc vers 1. De même, par densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, il existe une suite $(v_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ convergeant vers x. La suite $(f(v_n))_{n\geq 0}$ est constante égale à 0 et converge donc vers 0. Par le théorème de caractérisation séquentielle, on en déduit que $1_{\mathbb{Q}}$ n'a pas de limite en x et n'est donc pas continue en x.

Comme pour les limites, on peut définir les notions de **continuité à droite** et **continuité à gauche**.

Définition 33 (Continuité à droite et à gauche). *Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $x \in \mathcal{D}$. On dit que f est continue à droite (resp. à gauche) en x si*

$$\lim_{y\to x^+} f(y) = f(x). \quad (\textit{resp. } \lim_{y\to x^-} f(y) = f(x))$$

Quand f est continue à droite (resp. à gauche) en tout point de $\mathcal{D}$, on dit que f est continue à droite sur $\mathcal{D}$ (resp. à gauche).

On peut par exemple vérifier que la fonction partie entière $x \mapsto E(x)$ est continue à droite en tout point mais qu'elle n'est pas continue à gauche aux points entiers.

Proposition 37. *Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $x \in \mathcal{D}$. Alors f est continue en x si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en x.*

Démonstration. La preuve est une conséquence de la Proposition 31. □

5.2 Théorèmes reposant sur la continuité

Les théorèmes suivants sont tous extrêmement importants et utiles. Ils illustrent qu'une notion simple comme la continuité permet de dire beaucoup de choses sur une fonction.

5.2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Encore un des résultats importants de cette année. L'idée est très intuitive : si une fonction est continue, négative en a et positive en $b > a$, alors elle passe par 0 quelque part entre a et b.

Théorème 11 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.*

Démonstration. On considère l'ensemble

$$A = \{x \in [a, b], \text{ tel que } f(x) \geq 0\}$$

A est non vide (puisqu'il contient b) et minoré (par a) donc A possède une borne inférieure que l'on note m et qui appartient à $[a, b]$. Nous allons montrer que $f(m) = 0$.
En utilisant la définition de la borne inférieure, on peut construire une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans A convergeant vers m. En effet, pour tout $n \geq 1$, il existe un élément x_n de A tel que $m \leq x_n \leq m + 1/n$. D'après le théorème d'encadrement, la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ ainsi définie converge vers m. En utilisant le sens facile de la caractérisation séquentielle et la continuité de f, on en déduit que la suite $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge et $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(m)$. Or, pour tout $n \geq 1$, $f(x_n) \geq 0$ car $x_n \in A$. On en déduit, par passage à la limite, que $f(m) \geq 0$.
Si $m = a$ alors $f(m) \leq 0$ et la preuve est terminée.
Si $a < m$, comme m est un minorant de A,

$$\forall x \in [a, m[, \quad x \notin A,$$

et donc pour tout $x \in [a, m[$, $f(x) < 0$. En utilisant la continuité de f, on obtient $f(m) = \lim_{x\to m^-} f(x)$. On en déduit $f(m) \leq 0$. Cela conclut la preuve. □

Remarque 7. *Le théorème des valeurs intermédiaires nous donne l'existence mais pas l'unicité d'un zéro de f. On voit d'ailleurs sur des exemples très simples que cette unicité n'est pas toujours vérifiée.*

On peut déduire de cet énoncé une formulation un peu plus générale.

Théorème 12 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit I un intervalle et f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$. Alors l'image de f est un intervalle.*

Démonstration. Soit u et v dans l'image de f. On suppose $u \leq v$. Soit w tel que $u \leq w \leq v$. Le but est de montrer que w est aussi dans l'image de f. On introduit pour cela

$$\begin{array}{rccc} g & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & z & \mapsto & f(z) - w \end{array}$$

Comme u est dans l'image de f, il existe $a \in I$ tel que $f(a) = u$. De même, il existe $b \in I$ tel que $f(b) = v$. On remarque que $g(a) = u - w \leq 0$ et $g(b) = v - w \geq 0$. Comme I est un intervalle, l'intervalle $J := [\min\{a, b\}, \max\{a, b\}]$ est inclus dans I et on peut donc considérer $g_{|J}$. Cette fonction est continue donc, d'après le Théorème 11, il existe $c \in J$ (c appartient donc aussi à I) tel que $g(c) = 0$. On en déduit que $f(c) = w$ et donc que w appartient à l'image de f. □

Voici un exemple d'utilisation de ce théorème. Montrons que **toute fonction polynômiale de degré impair a au moins une racine réelle.**
Soit f une telle fonction. On peut supposer que le coefficient dominant est positif : si ce n'est pas le cas, on peut raisonner avec $-f$. En factorisant par le terme de plus haut degré, on montre que $\lim_{y \to +\infty} f(y) = +\infty$. On en déduit qu'il existe $A > 0$ tel que $f(A) \geq 0$. De même $\lim_{y \to -\infty} f(y) = -\infty$ et on en déduit qu'il existe $B < 0$ tel que $f(B) \leq 0$. Comme f est continue, on peut utiliser le théorème de valeurs intermédiaires et on en déduit qu'il existe $R \in [A, B]$ tel que $f(R) = 0$.

Voici maintenant un exemple élémentaire qui montre que l'hypothèse de continuité est indispensable dans le théorème. On considère la fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ dont on a déjà vu qu'elle n'est pas continue aux points entiers. On a $\lfloor 0 \rfloor = 0$ et $\lfloor 1 \rfloor = 1$. On a bien $1/2 \in [0, 1]$ mais quelque soit $x \in [0, 1]$ (et même quelque soit $x \in \mathbb{R}$), $\lfloor x \rfloor \neq 1/2$.

5.2.2 Théorème des bornes

On a vu que l'existence du sup d'une fonction, comme celui d'un ensemble, n'était pas assurée. Le théorème suivant nous assure que si une fonction est **continue** et que son domaine est un **segment** alors le sup et l'inf existent et sont même atteints : ce sont des max et min.

Théorème 13 (Théorème des bornes)**.** *Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes.*

Démonstration. On se contente de prouver que l'ensemble $Im(f)$ possède une borne supérieure M atteinte par f, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = M$. La preuve pour le min fonctionne exactement de la même façon (on peut aussi considérer la fonction $-f$).
On commence par montrer l'existence de $\sup_{x \in [a,b]} f$. D'après la propriété de la borne supérieure (Théorème 1), il suffit pour cela de montrer que f est majorée. Supposons que f n'est pas majorée et établissons une contradiction.

Soit $n \geq 0$. Comme f n'est pas majorée, n n'est pas un majorant de f. Il existe donc un réel $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) \geq n$. On a donc construit une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ telle que

$$\forall n \geq 0, \quad f(x_n) \geq n.$$

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (Théorème 7), on peut extraire une sous-suite convergente $(x_{\phi(n)})_{n\geq 0}$ de $(x_n)_{n\geq 0}$. On note $\bar{x}$ sa limite qui, par le théorème d'encadrement, appartient à $[a, b]$. Par continuité de f, $f(\bar{x}) = \lim_{n\to+\infty} f(x_{\phi(n)})$. Par ailleurs, par comparaison de limites (Proposition 21), on obtient que $\lim_{n\to+\infty} f(x_{\phi(n)}) = +\infty$. On tient donc une contradiction. On en déduit que f est majorée, et donc l'existence d'une borne supérieure que l'on note M.
Il nous reste à montrer que M est atteint par f. D'après la définition de la borne supérieure, on peut construire une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ telle que

$$\forall n \geq 1, \quad M - 1/n \leq f(x_n) \leq M.$$

En utilisant de nouveau le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ une sous-suite convergente $(x_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ dont on note $\bar{x}$ la limite dans $[a, b]$. Par continuité de f, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_{\phi(n)})$. Par ailleurs,

$$\forall n \geq 1, \quad M - \frac{1}{\phi(n)} \leq f(x_{\phi(n)}) \leq M,$$

donc, d'après le théorème d'encadrement (Théorème 5), $\lim_{n\to+\infty} f(x_{\phi(n)}) = M$. Ce qui conclut la preuve : la borne supérieure de f, M, est atteint en x. □

5.2.3 Théorème de la bijection réciproque

On termine cette section en revenant sur la Proposition 25. Nous considérons maintenant le cas où le domaine de définition est un intervalle et où la fonction est non seulement strictement croissante mais aussi continue sur son domaine de définition. On obtient alors l'énoncé suivant :

Proposition 38. *Soit f une fonction continue strictement monotone et dont le domaine de définition est un intervalle I. Alors*

i. l'image de f est un intervalle J et f est une bijection de I dans J,

ii. la fonction réciproque f^{-1} est une bijection continue strictement monotone (de même sens que f) de J dans I.

Démonstration. On suppose f strictement croissante ce qui ne change rien à la généralité de la preuve. Par rapport à la Proposition 25, nous devons

montrer, pour compléter la preuve de $i.$, que $Im(f)$ est un intervalle. C'est une conséquence directe du théorème des valeurs intermédiaires (Théorème 11).
Passons à la preuve de $ii.$ en commençant par la monotonie de f^{-1}. Soit u et v deux éléments de J tels que $u < v$ et x et y leurs uniques antécédents par f (c'est-à-dire $f^{-1}(u) = x$ et $f^{-1}(v) = y$). Si $y \leq x$ alors, par croissance de f, $v \leq u$ ce qui est absurde. On en déduit que $x < y$ et donc que f^{-1} est strictement croissante.
Montrons maintenant que f^{-1} est continue. Soit u un point de J, et x son unique antécédent par f. Supposons que f^{-1} ne soit pas continue en u. Le théorème de caractérisation séquentielle nous assure l'existence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans J et convergeant vers u telle que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := ((f^{-1}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ (à valeurs dans I) ne converge pas vers x. On considère une telle suite. Il existe donc $\varepsilon > 0$ et une extraction ϕ telle que

$$\forall n \geq 0, \quad |x_{\phi(n)} - x| > \varepsilon.$$

On en déduit qu'au moins un des deux ensembles $A := \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x_{\phi(n)} < x - \varepsilon\}$ ou $B := \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x_{\phi(n)} > x + \varepsilon\}$ est de cardinal infini. Supposons, puisque ça n'enlève aucune généralité à la preuve, que ça soit le cas pour A. On considère n_0 un élément de A. Comme I est un intervalle, que $x_{\phi(n_0)} \in I$, $x \in I$, et $x_{\phi(n_0)} < x - \varepsilon < x$, on en déduit que $x - \varepsilon \in I$. En utilisant la monotonie stricte de f, on obtient

$$\forall n \in A, \quad u_{\phi(n)} < f(x - \varepsilon).$$

Or, toujours grâce à la croissance stricte de f, on sait que $f(x-\varepsilon) < f(x)$. On en déduit donc que $(u_{\phi(n)})_{n\geq 0}$ ne converge pas vers $u = f(x)$, ce qui contredit la Proposition 22. □

Le résultat précédent est en fait optimal : on peut en effet en établir la réciproque suivante :

Proposition 39. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et f une injection continue de I dans $\mathbb{R}$. Alors f est strictement monotone sur I.*

Démonstration. Supposons que f ne soit pas strictement monotone. Commençons par montrer qu'il existe $x < y < z$ dans I tel que $(f(x) \leq f(y)$ et $f(z) \leq f(y))$ ou $(f(x) \geq f(y)$ et $f(z) \geq f(y))$. Bien que cela soit très intuitif, ça n'est pas si facile à prouver.
Comme f n'est pas strictement monotone, il existe $x_1 < x_2$ dans I tel que $f(x_1) \leq f(x_2)$ et $x_3 < x_4$ dans I tel que $f(x_3) \geq f(x_4)$. Comme f est injective, l'ensemble $\{x^1, x^2, x^3, x^4\}$ contient au moins 3 points. S'il contient

exactement 3, il est facile de conclure. Si cet ensemble contient 4 points, on considère le réordonnement (x^1, x^2, x^3, x^4) de (x_1, x_2, x_3, x_4), c'est à dire que $\{x^1, x^2, x^3, x^4\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ et $x^1 < x^2 < x^3 < x^4$. Supposons sans perdre de généralité que $f(x^1) \leq f(x^2)$. Si $f(x^3) \leq f(x^2)$ alors (x^1, x^2, x^3) convient. Si $f(x^2) \leq f(x^3)$ alors $f(x^4) \leq f(x^3)$ et (x^2, x^3, x^4) convient. Regardons maintenant la suite de la preuve.
Sans perdre de généralité, on suppose qu'il existe $x < y < z$ dans I tel que $f(x) \leq f(y)$ et $f(z) \leq f(y)$. Comme $x < y$ et f est injective, on en déduit que $f(x) \neq f(y)$ et donc $f(x) < f(y)$. En raisonnant de façon similaire, on obtient $f(z) < f(y)$. On a donc $\max(f(x), f(z)) < f(y)$ et il existe donc un réel u vérifiant

$$\max(f(x), f(z)) < u < f(y).$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, tous les éléments de $[f(x), f(y)]$ ont des antécédents dans $[x, y]$. On en déduit que u a un antécédent dans $[x, y]$. De plus, comme f est injective, $f(x) \neq u$ et $f(y) \neq u$. On en déduit donc que u a un antécédent dans $]x, y[$. En raisonnant exactement de la même façon sur $[y, z]$, on prouve que u a un antécédent dans $]y, z[$.
On a donc prouvé que u a deux antécédents distincts : un dans $]x, y[$ et un dans $]y, z[$. La fonction f n'est donc pas injective. □

5.3 Continuité et fonctions usuelles

Montrer *à la main* la continuité d'une fonction est souvent pénible. On va donc établir un catalogue de fonctions dites **fonctions usuelles** dont on prouve la continuité et on pourra ensuite utiliser le théorème d'opérations sur les fonctions continues pour établir la régularité de nouvelles fonctions.
On rappelle (voir l'Annexe B) les domaines de définition "maximaux" $\mathcal{D}_\alpha$ des fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$ où α est un réel (i.e. les plus grand domaines où cela a du sens de définir le mécanisme fonctionnel $x \mapsto x^\alpha$) :

1. si $\alpha \in \mathbb{N}$ alors $\mathcal{D}_\alpha = \mathbb{R}$
2. si $\alpha = 1/q$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ impair alors $\mathcal{D}_\alpha = \mathbb{R}$
3. si α est un réel positif ne rentrant pas dans les deux premiers cas $\mathcal{D}_\alpha = \mathbb{R}^+$ (en posant $0^\alpha = 0$)
4. si α est un réel strictement négatif alors $\mathcal{D}_\alpha = \mathcal{D}^*_{-\alpha}$

Théorème 14 (Continuité des fonctions usuelles)**.** *Les fonctions suivantes sont continues sur leur domaine de définition :*

— *Les **fonctions puissances** : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction*

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathcal{D}_\alpha & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^\alpha \end{array}$$

est continue sur $\mathbb{R}$

- *La fonction* ***exponentielle*** *est continue sur son domaine* $\mathbb{R}$ *et la fonction* ***logarithme*** *est continue sur son domaine* $\mathbb{R}_+^*$.
- *Les fonctions* ***trigonométriques*** *sinus et cosinus sont continues sur leur domaine de définition* $\mathbb{R}$. *La fonction tangente est continue sur son domaine* $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Les théorèmes suivants donnent les opérations que l'on peut faire sur les fonctions en préservant la continuité :

Proposition 40 (Opérations sur les fonctions continues)**.** *Soit* f *et* g *deux fonctions définies et continues sur un domaine* $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$. *Alors*

- *Les fonctions* $f + g$ *et* fg *sont continues sur* $\mathcal{D}$.
- *Si pour tout* $x \in \mathcal{D}, g(x) \neq 0$ *alors la fonction* $\frac{f}{g}$ *est continue sur* $\mathcal{D}$.

Proposition 41 (Composition de fonctions continues)**.** *Soit* f *est une fonction continue sur un domaine* $\mathcal{D}$ *et* g *une fonction continue sur un domaine* $\mathcal{E}$ *tel que* $Im(f) \subset \mathcal{E}$. *Alors la fonction* $g \circ f$ *est continue sur* $\mathcal{D}$.

Démonstration. Ces deux propositions sont des conséquences directes des Propositions 34 et 36 ainsi que de la définition de la continuité. □

5.4 Prolongement par continuité

Soit f une **fonction continue** sur son domaine de définition $\mathcal{D}$. On suppose que f **admet une limite finie** l **en** $x \in \overline{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D}$**.** On peut alors définir une nouvelle fonction $\bar{f}$ qu'on appelle prolongement par continuité de f de la façon suivante

$$\begin{array}{rcccl} \bar{f} & : & \mathcal{D} \cup \{x\} & \to & \mathbb{R} \\ & & y & \mapsto & \begin{cases} f(y) & \text{si } y \in \mathcal{D} \\ l & \text{si } y = x \end{cases} \end{array}$$

La fonction $\bar{f}$ **est continue sur** $\mathcal{D} \cup \{x\}$**.** On peut ainsi prolonger les fonctions continues en tout point de l'adhérence où la fonction admet une limite finie.
Pour un exemple très simple, considérerons la fonction

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & y & \mapsto & 1 \end{array}$$

Comme $0 \in \overline{\mathbb{R}^*}$ et que $\lim_{y\to 0} f(y) = 1$, on peut prolonger f par continuité de la façon suivante
$$\begin{array}{rccc} \bar{f} & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & y & \mapsto & 1 \end{array}$$
Bien entendu, toute fonction continue sur son domaine de définition n'admet pas forcément un prolongement continu. On peut avoir des cas où une fonction tend vers l'infini au bord du domaine ou encore des cas où la fonction oscille quand elle s'approche du bord. On peut par exemple considérer

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & y & \mapsto & \sin(\frac{1}{y}) \end{array}$$

qui n'admet pas de limite en 0.
Il y a également, comme autre exemple, le cas où une fonction admet des limites à droite et à gauche distinctes comme

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & y & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases} \end{array}$$

qui vérifie $f(0^+) = 1$ et $f(0^-) = 0$.

5.5 Uniforme continuité

Définition 34. *Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}$. On dit que f est **uniformément continue** si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall (x,y) \in \mathcal{D}^2,\ |x-y| \le \alpha \implies |f(x) - f(y)| \le \varepsilon.$$

Il est important de bien comprendre pourquoi **l'uniforme continuité est plus forte que la continuité** c'est-à-dire que toute fonction uniformément continue est aussi continue. On rappelle la définition de la continuité sur $\mathcal{D}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall y \in \mathcal{D},\ |x-y| \le \alpha \implies |f(x)-f(y)| \le \varepsilon$$

Dans la définition de la continuité le réel α que l'on considère pour ε donné dépend du point x où on se trouve. Il est possible qu'en faisant varier ce point, on ait à choisir α de plus en plus petit pour que les points à distance au plus α de x aient leur image $\varepsilon-$proche de $f(x)$. Si on voulait expliciter cette dépendance, il faudrait écrire

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D},\ \exists \alpha(x,\varepsilon) > 0 \text{ tel que } \forall y \in \mathcal{D},\ |x-y| \le \alpha \implies |f(x)-f(y)| \le \varepsilon$$

alors que l'uniforme continuité s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha(\varepsilon) > 0 \text{ tel que } \forall (x,y) \in \mathcal{D}^2,\ |x-y| \leq \alpha \implies |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon.$$

On note la différence importante avec la continuité : pour ε donné, il faut maintenant trouver un réel $\alpha > 0$ qui convient pour tout $x \in \mathcal{D}$. Avant de donner des exemples, insistons encore un peu sur ces deux définitions. La différence réside en fait dans l'inversion des deux quantificateurs $\forall$ et $\exists$. Si on considère une propriété $\mathcal{P}(\alpha, x)$ pouvant être vraie ou fausse selon les valeurs prises par α et x alors on a toujours

$$\exists \alpha\ \forall x \quad \mathcal{P}(\alpha, x) \implies \forall x\ \exists \alpha \quad \mathcal{P}(\alpha, x).$$

Encore une fois : pour que la partie gauche de l'implication soit vraie, il faut trouver un α qui convient à tous les x, i.e. tel que $\mathcal{P}(\alpha, x)$ est vraie pour tout x. Pour que la partie droite soit vraie, il suffit de pouvoir, pour chaque x, trouver un α (éventuellement adapté à x) tel que $\mathcal{P}(\alpha, x)$ soit vraie. Quand la propriété $\mathcal{P}$ est vraie au sens de la partie gauche de l'implication, on dit qu'elle est vraie *uniformément.*
Dans le langage courant, cette différence est évidente. Nous faisons tous la différence entre la phrase "tout le monde aime au moins un film" et la phrase "il existe un film qui plaît à tout le monde". Il est clair que dans le premier cas, le film diffère selon la personne que l'on considère alors que, dans le second, on est en train de parler d'un film qui fait l'unanimité.

Pour revenir à la question de l'uniforme continuité, un exemple d'une fonction continue mais pas uniformément continue nous aidera certainement à mieux comprendre cette notion. On considère la fonction f de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $1/x$. Cette fonction est continue car il s'agit de l'inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas sur son domaine. En revanche, elle n'est pas uniformément continue : intuitivement pour ε fixé, plus x est proche de 0 et plus il faut prendre α petit pour que les images des points $\alpha-$proches de x soient $\varepsilon-$proches de $1/x$.
Pour prouver que cette fonction n'est pas uniformément continue, il faut nier la définition de l'uniforme continuité. On pose $\varepsilon = 1$. Soit $\alpha > 0$. On cherche $x \in]0,1[$ tel que $x + \alpha < 1$ et $|f(x+\alpha) - f(x)| > 1$. Un calcul élémentaire montre que pour tout $x \in]0,1[$ tel que $x + \alpha < 1$, $|f(x+\alpha) - f(x)| = \frac{\alpha}{x(x+\alpha)}$. Or $\lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha}{x(x+\alpha)} = +\infty$. En prenant x suffisamment proche de 0, on a donc bien $|f(x+\alpha) - f(x)| > 1$.

Le théorème suivant nous assure du caractère uniformément continu d'une fonction dans le cas où son domaine de définition est un segment.

Théorème 15 (Théorème de Heine)**.** *Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.*

Démonstration. Supposons que f ne soit pas uniformément continue. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \alpha > 0,\ \exists (x, y) \in \mathcal{D}^2,\ |x - y| \leq \alpha \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon.$$

Pour tout $n \geq 1$, en prennant $\alpha = 1/n$, il existe donc x_n et y_n dans $[a, b]$ vérifiant

$$|x_n - y_n| \leq 1/n \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon.$$

La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est à valeurs dans le segment $[a, b]$ donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extraction ϕ telle que $(x_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ converge. On note x sa limite ($x \in [a, b]$). La suite $(x_{\phi(n)} - y_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ converge vers 0 et on en déduit (Corollaire 3) que $(y_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ converge vers x. En utilisant la continuité de f, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_{\phi\circ\psi(n)}) = \lim_{n\to+\infty} f(y_{\phi\circ\psi(n)}) = f(x).$$

Or, pour tout $n \geq 1$, on a $|f(x_{\phi(n)}) - f(y_{\phi(n)})| > \varepsilon$. On a donc bien une contradiction. □

Ce théorème nous assure par exemple que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, 1]$. Attention : l'hypothèse du segment est essentielle dans ce résultat. Par exemple, pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction

$$\begin{array}{ccc} [\varepsilon, 1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

est uniformément continue mais nous avons déjà vu que la fonction

$$\begin{array}{ccc}]0, 1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

n'est pas uniformément continue.

On introduit pour conclure ce chapitre une classe importante de fonctions vérifiant, entre autres propriétés, l'uniforme continuité :

Définition 35 (Fonction Lipschitzienne)**.** *Une fonction f définie sur un domaine $\mathcal{D}$ est dite lipschitzienne s'il existe $K \geq 0$ tel que*

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Si on connait la constante $K \geq 0$ impliquée dans la définition, on dit que f est $K-$lipschitzienne pour préciser la valeur de cette constante.

Proposition 42. *Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue sur son domaine.*

Démonstration. Soit f une fonction $K-$lipschitzienne sur un domaine $\mathcal{D}$. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\alpha = \varepsilon/K$. Alors pour tout x, y dans $\mathcal{D}$ vérifiant $|x-y| \leq \alpha$ on a

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y| \leq \varepsilon.$$

$\square$

Par exemple la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne et on en déduit qu'elle est uniformément continue alors que le théorème de Heine ne s'applique pas puisque le domaine de définition n'est pas un segment.

Chapitre 6

Dérivabilité

6.1 Définition et premières propriétés

La notion de **dérivabilité** permet d'affiner l'étude de la régularité d'une fonction. Alors que la continuité signifiait essentiellement que le graphe de la fonction était "d'un seul morceau", la dérivabilité nous assure que ce graphe est lisse au sens où il admet une tangente (non verticale) en tout point.

Définition 36. *Soit f une fonction dont le domaine $\mathcal{D}$ contient un intervalle non dégénéré (i.e. non vide et non réduit à un point) $[a,b]$. On définit le taux d'accroissement de f entre a et b par*

$$A(f,a,b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

L'accroissement $A(f,a,b)$ représente la pente de la droite reliant le point $(a,f(a))$ au point $(b,f(b))$.

Définition 37 (Dérivabilité)**.** *Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}$ contenant un intervalle non vide $]a,b[$ et x un point de cet intervalle. On dit que f est dérivable en x si la fonction*

$$\begin{array}{ccc}]a,b[\setminus\{x\} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & A(f,x,y). \end{array}$$

*a une limite dans $\mathbb{R}$ quand y tend vers x. On note alors $f'(x)$ cette limite qu'on appelle **dérivée de f en x**.*
Lorsque f est dérivable en tout point de $\mathcal{D}$, on définit la fonction dérivée f'

$$\begin{array}{cccc} f' & : & \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f'(x). \end{array}$$

On remarque que la limite impliquée dans la définition de la dérivabilité a bien du sens puisque x appartient à l'adhérence de l'ensemble $]a, b[\setminus\{x\}$. Intuitivement, la dérivée en x est la pente de la tangente au graphe de f en $(x, f(x))$.
Comme la continuité, la dérivabilité est une **propriété locale** (voir Remarque 6). Pour montrer qu'une fonction est dérivable sur son domaine il faut donc montrer qu'elle est dérivable en tout point de son domaine.
Montrons, par exemple, que la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $b \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$,

$$A(f, a, b) = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = b + a$$

on en déduit que $\lim_{b\to a} A(f, a, b) = 2a$. La fonction carré est donc dérivable en tout $a \in \mathbb{R}$ et sa dérivée en ce point vaut $2a$. La dérivée de la fonction carré est donc la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f' : a \mapsto 2a$.

Voici une caractérisation utile de la dérivabilité :

Proposition 43. *Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}$ contenant un intervalle non vide $]a, b[$ et x un point de $]a, b[$. Alors f est dérivable en x si et seulement s'il existe $A \in \mathbb{R}$, un réel $\alpha > 0$ et une fonction ε définie sur $] - \alpha, \alpha[$ tels que*

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0 \qquad \textit{et}$$
$$\textit{pour tout } h \in \mathbb{R} \textit{ vérifiant } |h| < \alpha, \quad f(x + h) = f(x) + A\ h + h\ \varepsilon(h).$$

On a alors $A = f'(x)$.

Démonstration. Sens direct : supposons que f soit dérivable en x. On choisit $\alpha > 0$ tel que $]x - \alpha, x + \alpha[\subset]a, b[$. On définit la fonction

$$\begin{array}{rcccl} \varepsilon & : &] - \alpha, \alpha[& \to & \mathbb{R} \\ & & h & \mapsto & \begin{cases} A(f, x, x + h) - f'(x) & \text{si } h \neq 0 \\ 0 & \text{si } h = 0 \end{cases} \end{array}$$

Par définition de la dérivabilité, la fonction ε a pour limite 0 quand h tend vers 0. De plus pour tout $h \in \mathbb{R}$ vérifiant $|h| < \alpha$ et $h \neq 0$

$$f(x + h) = f(x) + A(f, x, x + h)h = f(x) + f'(x)h + h\ \varepsilon(h).$$

En posant $A = f'(x)$ on complète donc bien la preuve du sens direct.
La réciproque est facile : on l'obtient en écrivant la convergence du taux d'accroissement vers A. $\square$

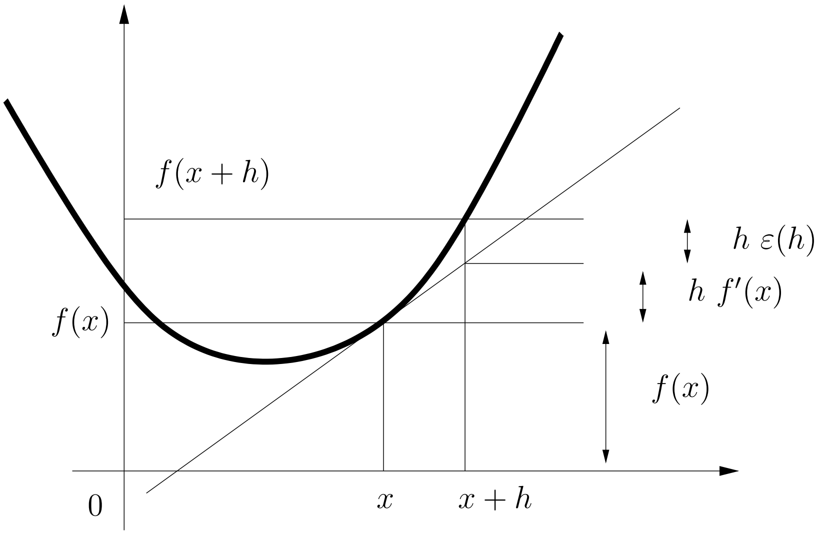

FIGURE 6.1: Le graphe d'une fonction dérivable en x. On note la tangente de pente $f'(x)$ au point $(x, f(x))$ du graphe. On "lit" également la Proposition 43 : la valeur de la fonction au point $x+h$ est donnée par $f(x)$ plus l'accroissement dû à la tangente $h\ f'(x)$ et enfin une quantité négligeable devant h, $h\varepsilon(h)$.

La décomposition de f que l'on vient de voir s'appelle un développement limité à l'ordre 1. Vous verrez au second semestre que l'on peut approximer certaines fonctions par des polynômes d'un ordre plus élevé.

On peut reprendre la fonction carré pour illustrer cette proposition. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad (a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2.$$

On pose $A = 2a$. On pose $\alpha = 1$ (c'est arbitraire) et on définit sur $]-\alpha, \alpha[$ la fonction $\varepsilon : h \mapsto h$. Les objets que l'on vient de construire vérifient les hypothèses de la Proposition 43 et on en déduit que la fonction carré est dérivable et sa dérivée est la fonction $a \mapsto 2a$.

Voici maintenant un exemple d'une fonction qui n'est pas dérivable en 0 : la fonction valeur absolue, définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto |x|$. En effet $\lim_{x\to 0^+} A(f, 0, x) = +1$ alors que $\lim_{x\to 0^-} A(f, 0, x) = -1$ ce qui implique que le taux d'accroissement n'a pas de limite. Géométriquement, c'est dû au fait que le graphe n'admet pas de tangente en $(0, 0)$ qui est un point anguleux.

Comme pour les limites, on peut parler de dérivée à droite ou à gauche :

Définition 38. *Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}$ et x un point du domaine tel qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ vérifiant $[x, b[\subset \mathcal{D}$. On dit que f est dérivable à droite en x si le taux d'accroissement $A(f, y, x)$ a une limite à droite réelle quand y tend vers x. On note alors $f'(x^+)$ cette limite qu'on appelle dérivée à droite de f en x. On définit de façon similaire la dérivée à gauche d'une fonction.*

Par exemple, on vient de voir que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 mais elle est dérivable à droite en 0 de dérivée 1 et à gauche en 0 de dérivée -1.
Attention : pour qu'une fonction admette une dérivée en un point, **il faut que la limite du taux d'accroissement soit finie**. Il en va de même pour les dérivées à droite ou à gauche. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est ainsi pas dérivable en 0^+. En effet, le taux d'accroissement entre 0 et x est égal dans ce cas à $1/\sqrt{x}$ qui diverge vers $+\infty$ quand x tend vers 0. Géométriquement, cela correspond au fait que la tangente au graphe en 0 est verticale (voir Figure 6.2).

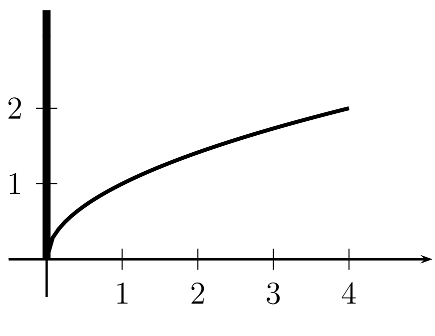

Figure 6.2: Graphe de la fonction racine : on note la tangente verticale en 0 où la fonction n'est donc pas dérivable.

Proposition 44. *Soit f définie sur un intervalle non vide $]a, b[$. Alors f est dérivable en $c \in]a, b[$ si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en c et que $f'(c^+) = f'(c^-)$. Dans ce cas $f'(c) = f'(c^+) = f'(c^-)$.*

La preuve ne présente pas de difficultés.

Proposition 45. *Soit f une fonction définie sur un intervalle non vide $]a, b[$ et $x \in]a, b[$. Si f est dérivable en x alors f est continue en x.*

Démonstration. Pour tout $y \in]a, b[\setminus \{x\}$,

$$f(y) - f(x) = A(f, x, y)(y - x)$$

Comme $y \mapsto A(f, x, y)$ converge vers $f'(x) \in \mathbb{R}$ quand y tend vers x et $y \mapsto y - x$ converge vers 0, on en déduit que $y \mapsto f(y) - f(x)$ converge également vers 0 quand y tend vers x ce qui dit bien que f est continue en x. □

Cette proposition rend rigoureuse l'idée du début du chapitre que la dérivabilité est un degré de régularité plus fort que la continuité.

6.2 Opérations préservant la dérivabilité

Comme la continuité, la dérivabilité est une propriété qui est conservée par les opérations usuelles sur les fonctions.

Proposition 46. *Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle non vide $\mathcal{D}$ et dérivables en un point x de $\mathcal{D}$ alors*

— *$f + g$ est dérivable en x et $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.*

— *fg est dérivable en x et $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.*

— *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, af est dérivable en x et $(af)'(x) = af'(x)$.*

Démonstration. Pour le premier point : on remarque que

$$\forall y \in \mathcal{D} \setminus \{x\}, \quad A(f + g, x, y) = A(f, x, y) + A(g, x, y).$$

En utilisant le théorème d'opérations sur les limites (Proposition 34), on en déduit que $y \mapsto A(f + g, x, y)$ converge quand y tend vers x et que $\lim_{y \to x} A(f + g, x, y) = f'(x) + g'(x)$.
Pour le second point, on note que

$$\forall y \in \mathcal{D} \setminus \{x\}, \quad A(fg, x, y) = f(y)A(g, x, y) + g(x)A(f, x, y).$$

Comme f est continue en x, $\lim_{y \to x} f(y) = f(x)$ et par définition de la dérivabilité $\lim_{y \to x} A(f, x, y) = f'(x)$ et $\lim_{y \to x} A(g, x, y) = g'(x)$. On conclut sans difficulté.
Pour le troisième point, on note que pour tout $y \in \mathcal{D} \setminus \{x\}$, $A(af, x, y) = aA(f, x, y)$ et le résultat est immédiat. □

Proposition 47. *Soit f et g deux fonctions définies sur intervalle non vide $\mathcal{D}$ et dérivables en un point $x \in \mathcal{D}$. On suppose de plus que $g(x) \neq 0$. Alors*

$$\frac{f}{g} \text{ est dérivable en } x \text{ et } \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}.$$

Démonstration. Comme g est dérivable en x, g est également continue en x (Proposition 45). On pose $\varepsilon = |g(x)|$. En utilisant la continuité de g en x on en déduit qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall y \in]x-\eta, x+\eta[, \quad |g(y) - g(x)| < \varepsilon.$$

En particulier, pour tout $y \in]x-\eta, x+\eta[$, $g(y) \neq 0$. On remarque ensuite que

$$\forall y \in]x-\eta, x+\eta[\setminus\{x\}, \quad A(\frac{f}{g}, x, y) = \frac{g(x)A(f,x,y) - f(x)A(g,x,y)}{g(y)g(x)}.$$

Le résultat s'obtient alors aisément : on note d'abord que $\lim_{y\to x} A(f,x,y) = f'(x)$, $\lim_{y\to x} A(g,x,y) = g'(x)$ et $\lim_{y\to x} g(y) = g(x)$ (car g est dérivable en x donc continue en x). On conclut avec la Proposition 40. □

Proposition 48. *Soit f une fonction d'un domaine $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathcal{E}$ et g une fonction définie sur $\mathcal{E}$. On suppose que f est dérivable en $x \in \mathcal{D}$ et que g est dérivable en $f(x) \in \mathcal{E}$ alors $g \circ f$ est dérivable en x et*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x).$$

Démonstration. Nous allons utiliser la Proposition 43 pour cette preuve. Comme f est dérivable en x et g en $f(x)$, il existe $\alpha_1 > 0$, une fonction $\varepsilon_1 :]-\alpha_1, \alpha_1[\to \mathbb{R}$ et $\alpha_2 > 0$, une fonction $\varepsilon_2 :]-\alpha_2, \alpha_2[\to \mathbb{R}$ tels que ε_1 et ε_2 aient pour limite 0 en 0 et

$$\begin{aligned} &\forall h \in \mathbb{R} \text{ tel que } |h| < \alpha_1, \quad f(x+h) = f(x) + f'(x)h + h\varepsilon_1(h) \\ &\forall u \in \mathbb{R} \text{ tel que } |u| < \alpha_2, \quad g(f(x)+u) = g(f(x)) + g'(f(x))u + u\varepsilon_2(u). \end{aligned}$$

Comme f est continue en x, il existe η que l'on peut supposer plus petit que α_1 tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad |h| < \eta \implies |f(x+h) - f(x)| < \alpha_2.$$

On a donc pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < \eta$,

$$\begin{aligned} g(f(x+h)) &= g(f(x)) + g'(f(x))[f'(x)h + h\varepsilon_1(h)] + [f'(x)h + h\varepsilon_1(h)]\varepsilon_2([f'(x)h + h\varepsilon_1(h)]) \\ &= g(f(x)) + g'(f(x))f'(x)h + h\varepsilon_3(h) \end{aligned}$$

en posant pour tout $h < \eta$,

$$\varepsilon_3(h) = g'(f(x))\varepsilon_1(h) + [f'(x) + \varepsilon_1(h)]\varepsilon_2([f'(x)h + h\varepsilon_1(h)]).$$

On vérifie enfin que ε_3 converge vers 0 quand h tend vers 0 (ce qui ne pose pas de difficultés). On en déduit que $g \circ f$ est dérivable en x et que $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$. □

Proposition 49 (Dérivée de la fonction réciproque)**.** *On considère une fonction f bijective de E dans F et y un élément de F tel que $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$. Alors f^{-1} est dérivable en y et*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Démonstration. Le point important est la preuve de la dérivabilité : la formule se retrouve sinon simplement en utilisant la Proposition 48 et $f \circ f^{-1} = Id$. Comme f est bijective, pour tout $z \in F \setminus \{y\}$, $f^{-1}(z) \neq f^{-1}(y)$ et donc $A(f, f^{-1}(y), f^{-1}(z))$ est bien défini et non nul. On a donc

$$\forall z \in F \setminus \{y\}, \quad A(f^{-1}, y, z) = \frac{1}{A(f, f^{-1}(y), f^{-1}(z))}.$$

De plus la Proposition 38 nous assure que f^{-1} est continue en y. On en déduit par composition des limites que $z \mapsto A(f^{-1}, y, z)$ a une limite finie en y et

$$\lim_{z \to y} A(f^{-1}, y, z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

□

6.3 Dérivées de fonctions usuelles

On est ici confronté au même problème que pour la continuité : montrer, en utilisant uniquement la définition de la dérivabilité, qu'une fonction est dérivable est souvent délicat. On se concentre donc d'abord sur l'étude de la dérivabilité des fonctions usuelles puis on utilisera les Propositions 46 et 47 pour étudier la dérivabilité de nouvelles fonctions.

Pour les **fonctions puissances**, (relire les différents domaines maximaux de définition $\mathcal{D}_\alpha$ selon les valeurs de α au Chapitre 5.3) les domaines $\mathcal{E}_\alpha$ où elles sont dérivables sont les suivants

- si $\alpha \in \mathbb{N}$ alors $\mathcal{E}_\alpha = \mathbb{R}$
- si $\alpha = 1/q$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ impair alors $\mathcal{E}_\alpha = \mathbb{R}^*$ (et $\mathcal{D}_\alpha = \mathbb{R}$)
- si $\alpha = 1/q$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ pair alors $\mathcal{E}_\alpha = \mathbb{R}_+^*$ (et $\mathcal{D}_\alpha = \mathbb{R}_+$)
- si α est un réel positif supérieur à 1 et non entier alors $\mathcal{E}_\alpha = \mathbb{R}^+$
- si α est un entier négatif alors $\mathcal{E}_\alpha = \mathbb{R}^*$
- si α est un réel inférieur à 1 et non entier alors $\mathcal{E}_\alpha = \mathbb{R}_+^*$

On notera que les domaines où les fonctions puissances sont dérivables ne coïncident pas nécessairement avec leurs domaines de définition. Par exemple, $x \mapsto \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ peut être définie sur $\mathbb{R}^+$ (où elle est également continue) mais elle est dérivable seulement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 16 (Dérivabilité des fonctions usuelles). *On donne, dans le tableau suivant, les fonctions usuelles avec leur domaine de définition, le domaine où elles sont dérivables et enfin leur dérivée.*

Fonction	*Domaine de définition*	*Domaine de dérivabilité*	*Dérivée*
$x \mapsto x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$\mathcal{D}_\alpha$	$\mathcal{E}_\alpha$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x$
$x \mapsto \alpha^x,\ \alpha > 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \ln \alpha \alpha^x$
$x \mapsto \ln(x)$	$\mathbb{R}_*^+$	$\mathbb{R}_*^+$	$x \mapsto \frac{1}{x}$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos(x)$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin(x)$
$x \mapsto \tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

Les proposions suivantes nous assurent que les opérations qui préservent la continuité préservent également la dérivabilité :

Proposition 50 (Opérations sur les fonctions dérivables). *Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur $\mathcal{D}$. Alors*

— *Les fonctions $f + g$ et fg sont dérivables sur $\mathcal{D}$*

— *Si pour tout $x \in \mathcal{D}, g(x) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur $\mathcal{D}$.*

Proposition 51 (Composition de fonctions dérivables). *Soit f dérivable sur $\mathcal{D}$et g dérivable sur un ensemble incluant l'image de $\mathcal{D}$. Alors $g \circ f$ est dérivable sur $\mathcal{D}$.*

Démonstration. Les deux propositions sont conséquences directes des Propositions 46, 47 et 48. □

6.4 Théorème des accroissements finis

Définition 39. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert $]a, b[$. On appelle **points critiques** de f les points de $]a, b[$ où la dérivée de f est nulle.*

Proposition 52. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert non vide $]a, b[$, et x un point de $]a, b[$ où f atteint un extremum local. Alors x est un point critique (i.e. $f'(x) = 0$).*

Remarque 8. *Il est important que l'intervalle soir **ouvert** pour que la proposition fonctionne. Par exemple la fonction identité définie sur $[0, 1]$ admet un maximum en 1 mais sa dérivée en ce point est non nulle.*
Par ailleurs on notera bien que la réciproque de la proposition est fausse. Par exemple la fonction $f : x \to x^3$ définie et dérivable sur l'intervalle ouvert $\mathbb{R}$ vérifie bien $f'(0) = 0$ mais 0 n'est pas un extremum de f.

Démonstration. On se contente du cas où l'extremum est un maximum, le cas du minimum se traitant de façon identique. Soit $x \in]a, b[$ tel que

$$\forall y \in]a, b[, \quad f(y) \leq f(x).$$

Comme x est un point de l'intervalle ouvert $]a, b[$, on peut considérer à la fois sa dérivée à gauche et à droite. Par définition de la dérivée à droite en x,

$$f'(x^+) = \lim_{y \to x^+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Or, pour tout $y \in [a, b]$, $f(y) - f(x) \leq 0$ et pour tout $y > x$, $y - x \geq 0$. On en déduit

$$\forall y > x, \quad A(f, x, y) \leq 0.$$

Par passage à la limite, on obtient $f'(x^+) \leq 0$.
En raisonnant exactement de la même façon pour la limite à gauche du taux d'accroissement en x, on obtient que $f'(x^-) \geq 0$.
Comme $f'(x) = f'(x^+) = f'(x^-)$ (Proposition 44), on en déduit que $f'(x) = 0$. □

Théorème 17 (Théorème de Rolle)**.** *Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ ($a < b$). On suppose que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et que $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = 0.$$

Démonstration. L'idée est de considérer la dérivée en un point où la fonction atteint son supremum ou son infimum.
Comme f est continue sur $[a, b]$, on peut déduire du théorème des bornes (Théorème 13), que f est bornée et atteint ses bornes. On note m et M les bornes inférieures et supérieures de f et, x_m et x_M, deux points où elles sont atteintes. Si $m = M = f(a)$, la fonction est constante et n'importe quel point de $[a, b]$ est de dérivée nulle. Sinon, supposons que $M > f(a)$ (l'autre cas $m < f(a)$ se traite de façon identique). On en déduit que $x_M \in]a, b[$. En appliquant la proposition précédente, on obtient $f'(x_M) = 0$. □

Théorème 18 (Théorème des accroissements finis)**.** *Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ ($a < b$). On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = A(f, a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Démonstration. On va se ramener au théorème de Rolle que l'on vient de prouver, en "déformant" f. On définit donc la fonction

$$\begin{array}{rccc} g & : & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x)-(x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \end{array}$$

Il est facile de vérifier que g satisfait les hypothèses du théorème de Rolle et on en déduit l'existence de $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or

$$\forall x \in [a,b], \quad g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

On en déduit que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Proposition 53 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ $(a < b)$. On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\forall x \in]a,b[, \quad |f'(x)| \leq M.$$

Alors

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2, \quad |f(y)-f(x)| \leq M|y-x|.$$

Démonstration. Soit x et y dans $[a,b]$. Si $x = y$ l'inégalité est triviale. On suppose donc, sans perdre de généralité, que $x < y$. Le théorème des accroissements finis appliqué à f sur $[x,y]$ nous assure l'existence de $c \in]x,y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y-x).$$

On conclut en passant aux valeurs absolues et en majorant $f'(c)$ par M. □

Nous allons rencontrer dans la suite de nombreuses applications du théorème des accroissements finis. Voici, pour commencer, une caractérisation des fonctions lipschitziennes dérivables :

Proposition 54. *Une fonction définie et dérivable sur un intervalle non vide est lipschitzienne si et seulement si sa dérivée est bornée.*

Démonstration. Commençons par le sens direct. Soit f une fonction K-lipschitzienne et dérivable sur un intervalle non vide I. Soit $x \in I$. On a

$$\forall y \in I \setminus \{x\}, \quad |A(f,x,y)| \leq K.$$

On en déduit, par passage à la limite, que $|f'(x)| = |\lim_{y \to x} A(f,x,y)| \leq K$. On a donc bien prouvé que la fonction dérivée f' est bornée par K sur I. Réciproquement : soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que f' soit bornée sur I par $K \in \mathbb{R}$. D'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(y)-f(x)| \leq K|y-x|.$$

On a bien prouvé que f est K-lipschitzienne. □

6.5 Utilisation de la dérivée pour l'étude des variations

Nous utilisons maintenant le théorème des accroissements finis pour étudier les variations d'une fonction dérivable.

Proposition 55. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle non vide $]a, b[$ et continue sur $[a, b]$. Alors f est constante sur $[a, b]$ si et seulement si f' est nulle sur $]a, b[$.*

Démonstration. Le sens direct est évident puisque si f est constante sur $[a, b]$ alors son taux d'accroissement entre deux points distincts quelconques de $[a, b]$ est nul et les limites de taux d'accroissement sont donc aussi nulles.

Pour la réciproque : soit f une fonction de dérivée nulle sur $]a, b[$. Soit x et y deux points de $]a, b[$ tels que $x < y$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ tel que $A(f, x, y) = f'(c)$. On en déduit que $A(f, x, y) = 0$ et donc $f(x) = f(y)$. On a donc montré que f est constante sur $]a, b[$. Comme f est continue sur $[a, b]$, on en déduit que f est constante sur $[a, b]$. $\square$

Théorème 19. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle non vide $]a, b[$ $(a < b)$ et continue sur $[a, b]$.*

- *$f' \geq 0$ sur $]a, b[$ si et seulement si f est croissante sur $[a, b]$*
- *$f' \leq 0$ sur $]a, b[$ si et seulement si f est décroissante sur $[a, b]$*
- *$f' \geq 0$ sur $]a, b[$ et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert non vide si et seulement si f est strictement croissante sur $[a, b]$*
- *$f' \leq 0$ sur $]a, b[$ et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert non vide si et seulement si f est strictement décroissante sur $[a, b]$*

Démonstration. Commençons par le **premier point**. Soit f tel que $f' \geq 0$ sur $]a, b[$. Soient x et y deux points de $[a, b]$ tels que $x < y$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ tel que $f'(c) = A(f, x, y)$. On en déduit que $A(f, x, y) \geq 0$ et donc $f(x) \leq f(y)$.
Réciproquement, supposons f croissante sur $[a, b]$. Soit $c \in]a, b[$. Alors

$$\forall x \in]a, b[\setminus \{c\}, \quad A(f, c, x) \geq 0.$$

On en déduit que $f'(c) = \lim_{x \to c} A(f, c, x) \geq 0$.
Le second point se montre évidemment de la même façon et il nous reste à montrer le **troisième point** (la preuve du 4 sera identique).
Supposons que $f' \geq 0$ sur $]a, b[$ et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert non

vide. Comme $f' \geq 0$ sur $]a, b[$, d'après le premier point, f est croissante sur $[a, b]$. Supposons que f ne soit pas strictement croissante. Il existe donc x et y dans $[a, b]$ tels que $x < y$ et $f(x) \geq f(y)$ et donc (comme f est croissante) $f(x) = f(y)$. Or f est croissante donc

$$\forall z \in [x, y], \quad f(x) \leq f(z) \leq f(y).$$

Comme $f(x) = f(y)$, on obtient que pour tout $z \in [x, y]$, $f(x) = f(z) = f(y)$. On peut alors appliquer la Proposition 55 (le sens facile) sur l'intervalle $[x, y]$ où f est constante. On en déduit que $f'(z) = 0$ pour tout $z \in [x, y]$. On a montré que f' s'annule sur un intervalle ouvert non vide ($]x, y[$), ce qui est absurde.
Réciproquement, si f est strictement croissante sur $[a, b]$ alors $f' \geq 0$. De plus, si f' s'annule sur un intervalle ouvert non vide alors en utilisant la proposition 55, on obtient que f est constante sur cet intervalle et donc qu'elle n'est pas strictement croissante. □

Corollaire 5. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et continue sur $\overline{I}$, l'adhérence de I. Alors*

- *$f' \geq 0$ sur I si et seulement si f est croissante sur $\overline{I}$*
- *$f' \leq 0$ sur I si et seulement si f est décroissante sur $\overline{I}$*
- *$f' \geq 0$ sur I et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert non vide si et seulement si f est strictement croissante sur $\overline{I}$*
- *$f' \leq 0$ sur I et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert non vide si et seulement si f est strictement décroissante sur $\overline{I}$*

En 2016 le cours s'arrêtera ICI ! (ce qui ne vous empêche pas de jeter un oeil à la suite...)

6.6 Dérivées successives

On considère une fonction f définie et dérivable sur un domaine $\mathcal{D}$. On appelle fonction dérivée la fonction

$$\begin{array}{rcccc} f' & : & \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

Si cette fonction f' est elle-même dérivable sur $\mathcal{D}$, on appelle dérivée seconde de f la dérivée de f' et on la note f''.

$$\begin{array}{rcccc} f'' & : & \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & (f')'(x) \end{array}$$

De manière générale, on définit de manière récursive les dérivées successives de f de la façon suivante : si, pour un entier $k \geq 1$, $f^{(k)}$ désigne la $k-$ème dérivée de f et que $f^{(k)}$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ alors on définit

$$\begin{array}{rccc} f^{(k+1)} & : \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (f^{(k)})'(x) \end{array}$$

Définition 40. *Pour tout entier $k \geq 1$, on définit $\mathcal{C}^k$ l'ensemble des fonctions dérivables k fois et dont la dérivée $k-$ème est continue. On définit aussi $\mathcal{C}^\infty = \cap_{k \geq 0} \mathcal{C}^k$, l'ensemble des fonctions que l'on peut dériver une infinité de fois.*

La classe à laquelle appartient une fonction mesure sa régularité. Plus l'indice de la classe est élevé et plus une fonction et ses dérivées successives peuvent être contrôlées.

On termine ce paragraphe avec la formule de Leibniz qui est parfois utile pour calculer les dérivées successives d'un produit.

Proposition 56 (Formule de Leibniz)**.** *Soit $n \geq 1$ un entier et f et g deux fonctions n fois dérivables sur un domaine $\mathcal{D}$. Alors fg est n fois dérivables sur $\mathcal{D}$ et*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Démonstration. On fait une preuve par récurrence sur n. Pour $n = 1$, l'hypothèse de récurrence est vraie : il s'agit de la Proposition 46. Soit $n \geq 1$. On suppose l'hypothèse vraie pour n. On considère maintenant f et g, deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur $\mathcal{D}$. D'après l'hypothèse au rang n, fg est n fois dérivable et $(fg)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$. Cette dérivée n-ième est dérivable comme somme et produit de fonction dérivable et on en déduit donc que fg est $n+1$ fois dérivable. Il reste à calculer cette dérivée.
Comme l'hypothèse de récurrence est vraie au rang n :

$$(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})' = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \right)'$$

En utilisant la Proposition 46, on obtient

$$\begin{aligned} (fg)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \end{aligned}$$

On réécrit ensuite la deuxième somme en faisant le changement d'indice $i = k - 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} = f g^{(n+1)} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i+1} f^{(i+1)} g^{(n-i)}.$$

On utilise enfin que pour $0 \leq i \leq n-1$, $\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}$,

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)} &= f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)} + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} \right) f^{(i+1)} g^{(n-i)} \\ &= f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i+1} f^{(i+1)} g^{(n-i)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}\end{aligned}$$

où, pour obtenir la dernière égalité, on a fait le changement d'indice $k = i+1$. On a donc prouvé l'hypothèse au rang $n+1$. $\square$

6.7 Prolongement $\mathcal{C}^k$

Soit $k \geq 1$ un entier et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$. Soit $x \in \overline{\mathcal{D}} \backslash \mathcal{D}$ tel que f admette une limite finie l en x. On dit que f admet un prolongement $\mathcal{C}^k$ en x si la fonction

$$\begin{array}{rcccc} \bar{f} & : & \mathcal{D} \cup \{x\} & \to & \mathbb{R} \\ & & y & \mapsto & \begin{cases} f(y) & \text{si } y \in \mathcal{D} \\ l & \text{si } y = x \end{cases} \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^k$.

6.8 Formule de Taylor

La formule de Taylor permet d'approximer une fonction f par une fonction polynomiale dont le degré dépend de la régularité de f :

Théorème 20 (Formule de Taylor-Lagrange)**.** *Soit n un entier, a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Démonstration. On définit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [a,b], \quad g(x) = f(x) - f(b) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k.$$

D'après les hypothèses, g est dérivable sur $]a,b[$ et, pour tout $x \in]a,b[$

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n \end{aligned}$$

On considère maintenant $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que l'application ϕ définie pour $x \in [a,b]$ par

$$\phi(x) = g(x) + \lambda \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

satisfasse $\phi(a) = 0$ (l'existence d'un tel λ ne pose pas de problème : il s'agit de la solution d'une équation linéaire du premier ordre non dégénérée). Comme ϕ satisfait les hypothèses du théorème de Rolle, on en déduit l'existence de $c \in]a,b[$ tel que $\phi'(c) = 0$. On a donc

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n - \lambda \frac{(b-c)^n}{n!} = 0.$$

et en simplifiant

$$\lambda = f^{(n+1)}(c).$$

Comme λ est solution de $\phi(a) = 0$, on obtient

$$0 = f(a) - f(b) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

ce qui est bien la formule recherchée. □

On obtient immédiatement le corollaire suivant du théorème que l'on vient de montrer :

Corollaire 6 (Inégalité de Taylor-Lagrange)**.** *On considère une fonction f satisfaisant les mêmes hypothèses que dans le Théorème 20 et on suppose de plus que $f^{(n+1)}$ est bornée sur $]a,b[$ par un réel M. Alors*

$$|f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}M.$$

On peut illustrer la formule de Taylor en écrivant un développement pour e. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto e^x$ est $\mathcal{C}^\infty$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous allons appliquer la formule de Taylor-Lagrange à f sur $[0, x]$. Pour tout $n \geq 0$, f est $\mathcal{C}^n$ et $f^{(n)}(0) = 1$. On en déduit

$$\forall n \geq 0 \quad \exists c_n \in]0, x[\text{ tel que } \quad e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{c_n}$$

Pour $x = 1$, on obtient donc

$$\forall n \geq 0 \quad \exists c_n \in]0, 1[\text{ tel que } \quad e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e^{c_n}}{(n+1)!}$$

Or, $\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{c_n}}{(n+1)!} = 0$ car la suite $(e^{c_n})_{n \geq 0}$ est bornée et la suite $(\frac{1}{(n+1)!})_{n \geq 0}$ tend vers 0. On en déduit que la suite $(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!})_{n \geq 0}$ converge vers e. On notera cette convergence

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

On notera également que cette méthode s'adapte sans difficultés pour donner un développement en série de e^x, $x \in \mathbb{R}$.

Chapitre 7

Fonctions trigonométriques et hyperboliques

Ce chapitre a également été supprimé cette année du programme du premier semestre. Vous l'étudierez pendant le cours d'analyse du second semestre. Il ne figure donc pas dans cette version papier du cours mais vous le trouverez dans la version électronique du poly disponible sur ma page.

Dans ce dernier chapitre, nous utilisons les différents résultats que nous avons prouvés dans les chapitres précédents pour définir et étudier de nouvelles fonctions.

7.1 Réciproques des fonctions trigonométriques

Dans cette section nous allons considérer les réciproques des fonctions sin, cos et tan sur les intervalles adéquats.

7.1.1 La fonction arcsin

On rappelle le graphe de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ (voir Figure 7.1).

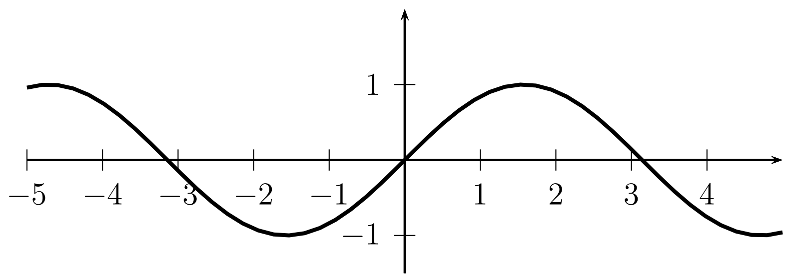

FIGURE 7.1: la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est périodique de période 2π et impaire.

La fonction

$$\begin{array}{rcl} \sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to & [-1, 1] \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$$

est strictement croissante et continue sur son domaine et l'image de $[-\pi/2, \pi/2]$ est $[-1, 1]$. En utilisant la Proposition 38, on en déduit que c'est une bijection entre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $[-1, 1]$. On appelle arcsin sa réciproque

$$\begin{array}{rcl} \arcsin : [-1, 1] & \to & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x & \mapsto & y = \text{ unique réel de } [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ tel que } \sin(y) = x. \end{array}$$

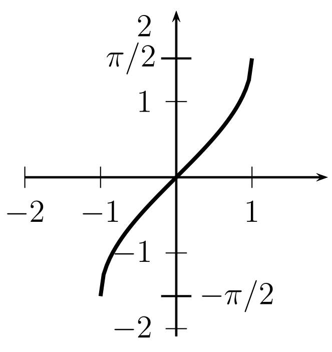

FIGURE 7.2: Graphe de la fonction $x \mapsto \arcsin(x)$.

Proposition 57 (Propriétés de arcsin)**.** *La fonction* arcsin *est* ***continue, impaire et strictement croissante*** *sur* $[-1, 1]$*. De plus, elle est* ***dérivable***

sur $]-1,1[$ *et*

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. La première partie de la proposition est une conséquence directe de la Proposition 38 à part le caractère impair qu'on laisse en exercice. La dérivabilité vient de la Proposition 49 qui nous assure de plus que pour tout $x \in]-1,1[$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))}.$$

Or, la dérivée de $x \mapsto \sin(x)$ est $x \mapsto \cos(x)$ et

$$\forall x \in [-1,1],\ \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-x^2}.$$

On rappelle en effet que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ (c'est Pythagore !) : cela donne bien $|\cos(x)| = \sqrt{1-\sin^2(x)}$. Or arcsin est à valeur dans $[-\pi/2, \pi/2]$ donc pour $x \in [-1,1]$, $\cos(\arcsin(x)) > 0$

□

7.1.2 La fonction arccos

On rappelle le graphe de la fonction $x \mapsto \cos(x)$. La fonction

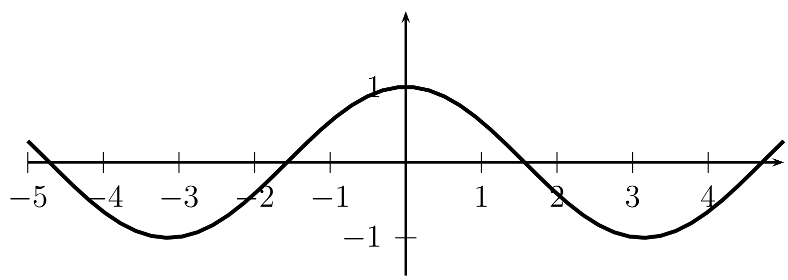

FIGURE 7.3: la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est périodique de période 2π et paire.

$$\begin{array}{rccl} \cos & : & [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ & & x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$$

est strictement décroissante et continue de $[0,\pi]$ dans son image $[-1,1]$. En utilisant la Proposition 38, on en déduit que c'est une bijection entre ces deux intervalles. On appelle arccos sa réciproque

$$\begin{array}{rcccl} \arccos & : & [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ & & x & \mapsto & y = \text{ unique réel de } [0,\pi] \text{ tel que } \cos(y) = x. \end{array}$$

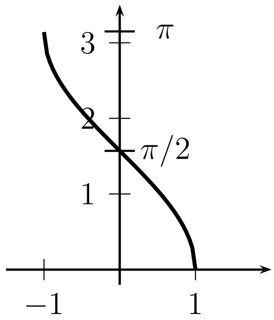

FIGURE 7.4: Graphe de la fonction $x \mapsto \arccos(x)$.

Proposition 58 (Propriétés de arccos)**.** *La fonction* arccos *est* ***continue et strictement décroissante*** *sur* $[-1,1]$*. De plus, elle est* ***dérivable*** *sur* $]-1,1[$ *et*

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. De nouveau, la première partie de la proposition est une conséquence directe de la Proposition 38. La dérivabilité vient de la Proposition 49 qui nous assure de plus

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))}.$$

Or la dérivée de $x \mapsto \cos(x)$ est $x \mapsto -\sin(x)$ et

$$\forall x \in [-1,1], \quad \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1-x^2}.$$

Cela permet de conclure. $\square$

7.1.3 La fonction arctan

On rappelle le graphe de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ Figure 7.5. La fonction

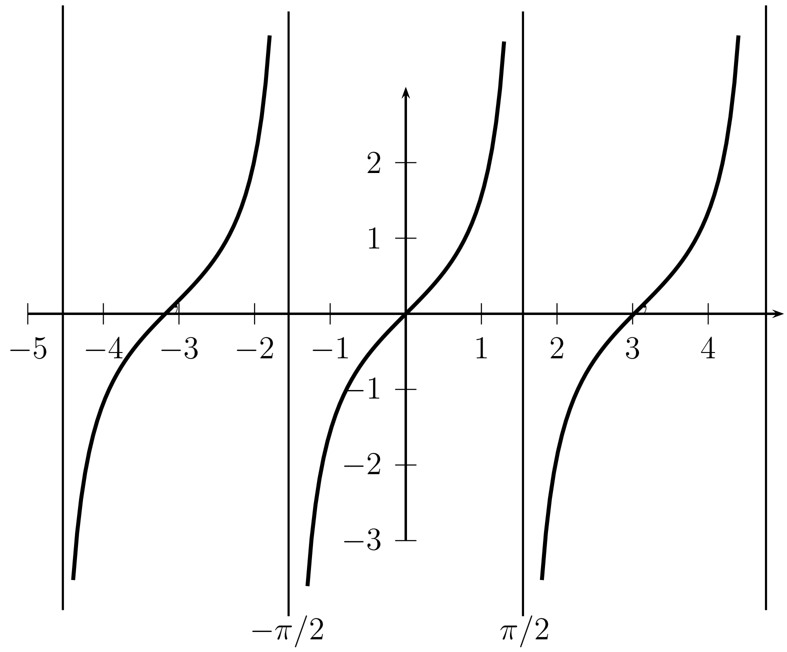

FIGURE 7.5: la fonction $x \mapsto \tan(x)$ est périodique de période π et impaire.

$$\begin{array}{rcccc} \tan & : &]-\pi/2, \pi/2[& \to &]-\infty, +\infty[\\ & & x & \mapsto & \tan(x) \end{array}$$

est strictement croissante et continue sur son domaine et a pour image $]-\infty, +\infty[$. En utilisant la Proposition 38, on en déduit que c'est une bijection entre $]-\pi/2, \pi/2[$ et $]-\infty, +\infty[$. On appelle arctan sa réciproque

$$\begin{array}{rcccc} \arctan & : &]-\infty, +\infty[& \to &]-\pi/2, \pi/2[\\ & & x & \mapsto & y = \text{ unique réel de } [0, \pi] \text{ tel que } \tan(y) = x. \end{array}$$

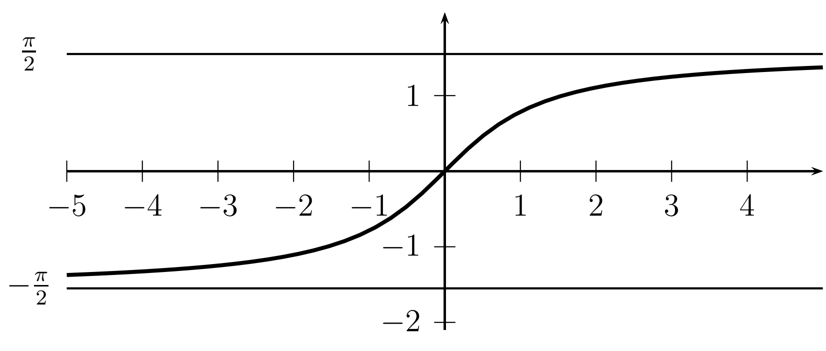

FIGURE 7.6: Graphe de la fonction $x \mapsto \arctan(x)$.

Proposition 59 (Propriétés de arctan)**.** *La fonction* arctan *est* ***continue, impaire et strictement croissante*** *sur* $\mathbb{R}$*. Elle satisfait*

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

De plus, elle est ***dérivable*** *sur son domaine et*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Démonstration. De nouveau, seul le dernier point pose problème. La dérivabilité vient encore de la Proposition 49 qui nous assure

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))}.$$

Or, la dérivée de $x \mapsto \tan(x)$ est $x \mapsto 1/\tan^2(x)$ et on conclut aisément. $\square$

7.1.4 Quelques relations

Proposition 60. *Pour tout* $x \in [-1, 1]$*,*

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}\ \textit{signe}(x)$$

Démonstration. Pour la première relation, on considère la fonction f définie pour tout $x \in]-1,1[$ par $f(x) = \arcsin(x) + \arccos(x)$. Cette fonction est dérivable sur son domaine et sa dérivée y est nulle. On en déduit que f est une fonction constante. Pour trouver la valeur de cette constante, on calcule $f(0) = \arcsin(0) + \arccos(0) = 0 + \pi/2$.
Pour la seconde relation, on considère la fonction g définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$. Cette fonction est dérivable sur son domaine et sa dérivée est nulle. De plus $\lim_{x\to0^+} g(x) = \arctan(0) + \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \pi/2$. Cela permet de conclure pour les réel positifs. On étend le résultat aux réels négatifs en utilisant que la fonction arctan est impaire. $\square$

7.2 Fonctions hyperboliques et leurs réciproques

7.2.1 Fonctions hyperboliques

On définit les fonctions suivantes

Définition 41.
La fonction sinus hyperbolique

$$\begin{array}{rccc} \sinh & : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

La fonction cosinus hyperbolique

$$\begin{array}{rccc} \cosh & : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$$

La fonction tangente hyperbolique

$$\begin{array}{rccc} \tanh & : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \end{array}$$

La fonction cotangente hyperbolique

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{cotanh} & : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \end{array}$$

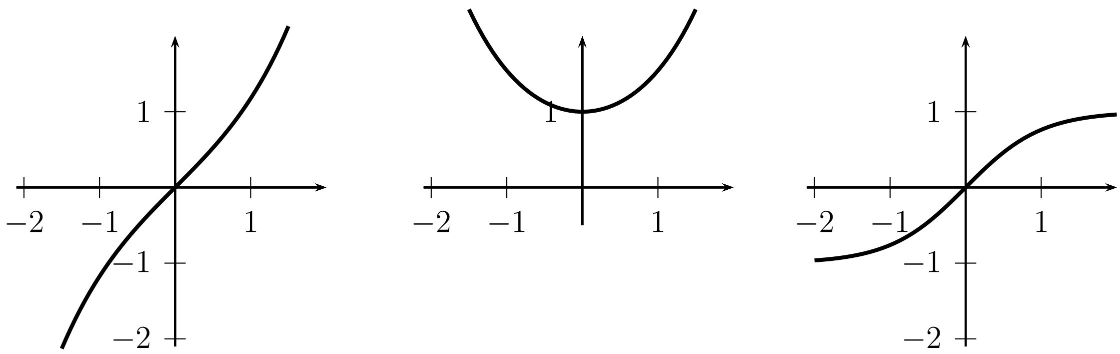

FIGURE 7.7: Les graphes des fonctions sinh, cosh et tanh.

On note la relation importante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

Proposition 61. *1. Les fonctions* sinh, tanh *et* cotanh *sont impaires et* cosh *est paire.*

2. *Toutes ces fonctions sont $\mathcal{C}^\infty$ et*

$$\cosh' = \sinh \qquad \sinh' = \cosh \qquad \tanh' = 1 - \tanh^2 = \frac{1}{\cosh^2}$$

$$\text{cotanh}' = \frac{-1}{\sinh^2}$$

La preuve de ces différents résultats ne présente aucune difficulté et est donc laissée en exercice.

7.2.2 Fonctions hyperboliques réciproques

Proposition 62.

— *La fonction* $\sinh$ *est une bijection strictement croissante de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.
— *La fonction* $\cosh$ *est une bijection strictement croissante de* $\mathbb{R}^+$ *dans* $[1, +\infty[$.
— *La fonction* $\tanh$ *est une bijection strictement croissante de* $\mathbb{R}$ *dans* $]-1, 1[$.

Démonstration. La preuve s'appuie, sans difficulté, sur le calcul des dérivées pour montrer la monotonie stricte puis sur le Théorème 19. □

On peut donc considérer les bijections réciproques de ces trois fonctions que l'on notera argsh $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$**, argch** $: [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ **et argth** $:]-1, 1[\to \mathbb{R}$**.**

Proposition 63. 1. *La fonction* argsh *est impaire et dérivable sur* $\mathbb{R}$. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$

$$\text{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\text{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

2. *La fonction* argch *est dérivable sur* $]1, +\infty[$. *Pour tout* $x \in]1, +\infty[$

$$\text{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$\text{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \qquad (\textit{relation valable aussi en } 0)$$

3. *La fonction* argth *est impaire et dérivable sur* $]-1, 1[$. *Pour tout* $x \in]-1, 1[$

$$\text{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$
$$\text{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$$

La preuve est laissée en exercice !

Annexe A

Quelques conseils de rédaction

En mathématiques, la rédaction joue un rôle essentiel qui dépasse largement la question du style. Il s'agit de donner forme à votre raisonnement et de le communiquer à votre lecteur. Souvent les rédactions peu compréhensibles marquent des raisonnement faux. Voici quelques conseils pour vous aider à rédiger correctement. Cette liste n'est pas exhaustive. Par ailleurs la rédaction en mathématiques est difficile et longue à maitriser : ce poly est lui-même sans doute encore rempli de maladresses, voire de fautes de rédaction ou de raisonnement. N'hésitez pas à les corriger et à me les signaler !

1. Il faut **séparer le texte mathématiques du texte en français**. Par exemple, $\forall$, $\exists$ sont des quantificateurs logiques que vous ne devez pas utiliser comme des abréviations mais seulement dans les phrases logiques.
2. Il faut **introduire toutes les notations que vous utilisez**.
3. Toutes les variables n'ont pas la même **durée de vie**. Par exemple :
   - Les phrases "Soit $\varepsilon > 0$." ou "Il existe donc $\varepsilon > 0$." introduisent un réel que l'on appelle ε. Pour toute la durée de la preuve la lettre ε désignera ce réel.
   - Dans la proposition "$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon/2 > 0$" ou encore dans "$\exists \varepsilon > 0$" la variable ε est quantifié par $\forall$ ou $\exists$. La lettre ε n'est alors définie que le temps de la phrase logique et non plus pour toute la durée de la preuve. Sortie de la phrase logique, elle n'a plus de sens !
   - Quand on écrit $\sum_{i=1}^{10} i^2$, la lettre i désigne un indice muet de sommation qui n'a de sens que le temps de la somme. En dehors de cette formule, la lettre i ne désigne plus rien.

   Il faut respecter ces durées de vie. Changer la valeur d'une variable déjà affectée est une faute logique.

4. Voici un **exemple typique** d'un type de proposition que vous pourriez avoir à prouver :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } P(\varepsilon, \alpha)$$

où P désigne une proposition logique.
Souvent il faut procéder de la façon suivante (mais ça n'est pas systématique...n'en faites pas une règle !).

   (a) On doit montrer que quelque chose est vraie pour tout $\varepsilon > 0$ (en l'occurrence : $\exists \alpha > 0$ tel que $P(\varepsilon, \alpha)$). On fixe donc arbitrairement un ε et prouver la proposition pour cet ε arbitraire. La phrase type permettant de fixer ε est :
   Soit $\varepsilon > 0$.
   Ce que l'on vient de gagner : on a désormais fixé un ε pour toute la preuve et on va donc pouvoir travailler avec.

   (b) L'étape suivante est de trouver un $\alpha > 0$ tel que $P(\varepsilon, \alpha)$ est vrai (où ε est celui introduit à l'étape précédente). On va donc travailler pour cela en utilisant des théorèmes, des calculs ou des raisonnements variés. A l'issue de ce travail ont doit avoir construit ou exhiber un certain α. Le résultat de ce travail doit être marqué d'une certaine façon, par exemple :
   On pose $\alpha = ...$
   ou
   Il existe donc α **tel que ...**

   (c) La dernière étape consiste à prouver que $P(\alpha, \varepsilon)$ est vrai où ε et α sont ceux obtenus à l'issue des deux étapes précédentes. Ce qui peut de nouveau nécessiter raisonnements et autres calculs... On conclut souvent par :
   On a donc bien $P(\varepsilon, \alpha)$.

Entrainez vous à souligner dans vos démonstrations ces étapes clés qui structurent le raisonnement !

5. **Bien utiliser les théorèmes** :
   (a) Vérifier soigneusement toutes les hypothèses du théorème utilisé.
   (b) Nommer explicitement le théorème utilisé.

6. Relisez et familiarisez vous avec les **différents types de raisonnements** et leur rédaction type exposés dans le cours d'algèbre.

Annexe B

Les fonctions puissances

On cherche dans cette annexe à construire les fonctions puissances

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_\alpha & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^\alpha \end{array}$$

où α désigne un réel et $\mathcal{D}_\alpha$ le domaine maximale sur lequel on peut définir ce mécanisme fonctionnel.

1. $\underline{\alpha \in \mathbb{N}}$
   C'est le cas le plus simple : on peut en effet définir pour tout réel x le produit de ce réel avec lui-même α fois. On a donc $\underline{\mathcal{D}_\alpha = \mathbb{R}}$.
2. $\underline{\alpha = 1/q,\ q \in \mathbb{N} \text{ et } q \text{ impair}}$
   Pour $q \in \mathbb{N}^*$ impair, la fonction

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^q \end{array}$$

   est strictement croissante et continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. D'après la Proposition 38, cette fonction est une bijection dont la réciproque est également continue et strictement croissante. C'est cette fonction réciproque qui définit

$$\begin{array}{ccccc} f^{-1} & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^{\frac{1}{q}} \end{array}$$

   On a donc dans ce cas $\underline{\mathcal{D}_\alpha = \mathbb{R}}$.
3. $\underline{\alpha = 1/q,\ q \in \mathbb{N} \text{ et } q \text{ pair}}$
   On retrouve la même construction que pour le cas précédent mais cette fois, pour avoir une bijection, on restreint le domaine à $\mathbb{R}^+$ et l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}^+$:

$$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ & & x & \mapsto & x^q \end{array}$$

et la bijection réciproque est donc définie par

$$f^{-1} \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+} & \to & \mathbb{R}^{+} \\ x & \mapsto & x^{\frac{1}{q}} \end{array}$$

On a donc dans ce cas $\underline{\mathcal{D}_\alpha = \mathbb{R}^+}$.

4. $\underline{\alpha \in \mathbb{R}^+ \text{ mais ne correspondant pas aux cas précédents.}}$
   On définit dans ce cas pour tout réel strictement positif x^α comme $e^{\alpha \ln x}$ ce qui suppose bien sûr d'avoir défini l'exponentiel (ce que nous n'avons pas fait). Cette expression n'a bien sûr du sens uniquement pour $x > 0$. On a donc $\underline{\mathcal{D}_\alpha = \mathbb{R}^+}$ (en posant $0^\alpha = 0$). On remarque que ce cas inclut le cas 3 qu'il était cependant intéressant de distinguer car la construction y est plus élémentaire (elle ne nécessite pas l'exponentielle).
5. $\underline{\alpha \in \mathbb{R}^-}$
   Pour un réel négatif α on construit la fonction puissance comme l'inverse de la fonction puissance associée à $-\alpha$ (qui est donc traité dans les cas précédents). Le domaine est donc identique à l'exception des points d'image nulle : il s'agit en fait uniquement de 0. On a donc : $\underline{\mathcal{D}_\alpha = \mathcal{D}_{-\alpha} \setminus \{0\}}$.