Université Paris-Dauphine, M1 MMD
Contrôle des chaînes de Markov (2017 – 18)

Feuille d'exercices n°2 : Arrêt optimal

Exercice 1. Soient (X_n) une martingale et T un temps d'arrêt (de la filtration engendrée par la martingale).

1. Rappeler l'énoncé du théorème d'arrêt.
2. On se propose de montrer une variante de ce théorème. Supposons que T vérifie

$$\mathbb{P}(T < +\infty) = 1, \quad \mathbb{E}[|X_T|] < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[|X_n| \mathbb{1}_{\{T>n\}}] \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

   (a) Montrer que $\mathbb{E}[|X_T| \mathbb{1}_{\{T>n\}}] \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

   (b) Montrer que $\mathbb{E}[|X_{T\wedge n} - X_T|] \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

   (c) En déduire que $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$.

Exercice 2 (partiel 2013 – 2014) Soit T un temps d'arrêt d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\mathbb{P}\left(T \leq n+1 \mid \mathcal{F}_n\right) > \varepsilon \quad \text{p.s.}.$$

Montrer que T est fini p.s. et $\mathbb{E}[T] < \infty$.

Indication : on rappelle que pour une v.a. X à valeurs entières positives, $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$.

Exercice 3 (Partiel 2016) Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration et S et T deux temps d'arrêt.
Montrer que l'événement $\{S \leq T\}$ est dans la tribu $\mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.

Exercice 4 (problème de Moser). Chaque minute, une machine tire au hasard un nombre réel positif. On note X_i le réel obtenu à la minute i et on suppose que les $X_i, i \geq 1$ sont des v.a. i.i.d. positives d'espérance finie. Vous pouvez observer la machine pendant N minutes. Chaque minute, vous avez le choix entre dire "stop" ou "je continue", mais vous ne pouvez dire "stop" qu'une seule fois. Si vous décidez de vous arrêter à la minute i, on vous remet (en euros) la somme X_i et le processus s'arrête là. Sinon le processus continue jusqu'à ce vous disiez "stop". L'horizon est fini : si vous ne vous êtes pas arrêtés strictement avant la minute N, vous devez dire "stop" à la minute N. L'objectif est de trouver une stratégie optimale maximisant la somme reçue.

1. Rappeler la construction de la fonction valeur $Z_n, 1 \leq n \leq N$ solution de ce problème d'arrêt optimal et montrer que Z_n est mesurable par rapport à $\sigma(X_n)$ pour tout $1 \leq n \leq N$ (utiliser une récurrence rétrograde).
2. Soit $V_n = \mathbb{E}[Z_n]$. Montrer que $V_n = \varphi(V_{n+1})$, $\forall 1 \leq n \leq N-1$, où $\varphi(x) = \mathbb{E}[\sup(X_1, x)]$.
3. Montrer que φ est une fonction positive et croissante, telle que $\varphi(x) - x$ est décroissante et $\varphi(x) - x \to 0$ si $x \to +\infty$.
4. Montrer qu'un temps d'arrêt optimal est

$$T^\star = \inf\{k \leq N-1 : X_k \geq V_{k+1}\}$$

si cet infimum existe et $T^\star = N$ sinon.
5. Supposons que les X_i sont uniformément distribués sur $[0, 1]$ et prenons $N = 6$. Montrer que la stratégie optimale est donnée par la procédure suivante : on s'arrête au temps 1 si $X_1 \geq 0.775$; sinon on regarde X_2 et on s'arrête au temps 2 si $X_2 \geq 0.742$; sinon on regarde X_3 et on s'arrête au temps 3 si $X_3 \geq 0.695$; sinon on regarde X_4 et on s'arrête au temps 4 si $X_4 \geq 0.625$; sinon on regarde X_5 et on s'arrête au temps 5 si $X_5 \geq 1/2$, sinon on s'arrête au temps 6.

   Quel est le gain moyen optimal ?

Exercice 5 . On cherche à choisir parmi N objets le meilleur avec la plus grande probabilité possible. Le principe est d'inspecter les objets un par un, et à chaque fois de décider si on choisit l'objet inspecté (dans ce cas le processus d'inspection s'arrête et on ne regardera pas les objets suivants) ou si on passe à l'inspection de l'objet suivant. On ne peut pas revenir en arrière. Si les $N-1$ premiers objets n'ont pas été choisis, on prend alors automatiquement le N-ième objet. L'objectif de cet exercice est de déterminer une stratégie d'arrêt nous permettant de maximiser la probabilité de choisir le meilleur objet parmi les N à notre disposition.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et S_N l'ensemble des permutations de N éléments. Soit $\Sigma : \Omega \to S_N$ une variable aléatoire *uniforme* à valeurs dans S_N. La valeur Σ_i représente le rang absolu du i-ème objet inspecté (on suppose que les objets ont tous une valeur différente). Par exemple si $\Sigma_i(\omega) = 1$, le meilleur objet est dans la position i. On remarque qu'on ne peut pas observer directement $\Sigma(\omega)$ (on ne connaît le classement absolu des N objets qu'une fois qu'on les a tous inspectés).

A chaque étape n, on observe une variable aléatoire X_n qui donne le rang *relatif* du n-ème objet inspecté par rapport aux $n-1$ objets inspectés auparavant. Donc $X_1 = 1$, $X_2 \in \{1, 2\}$,. . .,$X_n \in \{1, \ldots, n\}$ et $X_N = \Sigma_N$: une fois qu'on a inspecté tous les objets on connaît leur classement absolu. A chaque instant n, on connaît $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, la tribu engendrée par les rangs relatifs des premiers n objets. Par exemple : si $N = 4$ et $\Sigma(\omega) = (3, 4, 1, 2)$ alors $X_1(\omega) = 1, X_2(\omega) = 2, X_3(\omega) = 1, X_4(\omega) = 2$.

Soit $\Xi = \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{N}^N : 1 \leqslant x_k \leqslant k, k = 1, \ldots, N\}$ l'ensemble des valeurs possibles pour le vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_N)$. Remarquons que X est une fonction mesurable de Σ. Plus précisément, l'application $\Psi : S_N \to \Xi$ qui associe à une permutation la suite correspondante des rangs relatifs est bijective, donc $X = \Psi \circ \Sigma$ et $\Sigma = \Psi^{-1} \circ X$: étant donnée la suite de rangs relatifs $X_1(\omega), ..., X_N(\omega)$, on peut reconstruire $\Sigma(\omega)$.

Notre objectif est de trouver un temps d'arrêt $T \in [[1, N]]$ (de la filtration $(\mathcal{F}_n)$) qui maximise la quantité

$$\mathbb{P}(\Sigma(T) = 1) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\Sigma(T)=1\}}\right].$$

1. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_N = x_N\right) = \frac{1}{N!}, \quad \forall (x_1, ..., x_N) \in \Xi.$$

2. Montrer que les variables $X_i, 1 \leq i \leq N$ sont indépendantes, et que pour tout entier $n \in [[1, N]]$ et tout entier $j \in [[1, n]]$,

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \frac{1}{n}.$$

3. On définit le processus adapté Y par $Y_k = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\Sigma(k)=1\}} | \mathcal{F}_k\right]$, $k \in [[1, N]]$. Montrer que pour tout temps d'arrêt T borné par N,

$$\mathbb{P}(\Sigma(T) = 1) = \mathbb{E}[Y_T].$$

4. Montrer que

$$Y_n = \mathbb{1}_{\{X_n=1\}} \frac{n}{N}$$

(en particulier Y_n est mesurable par rapport à $\sigma(X_n)$).

5. Montrer que la fonction valeur (Z_n) est bien définie et que Z_n est mesurable par rapport à $\sigma(X_n)$, $\forall 1 \leq n \leq N$. En déduire qu'un temps d'arrêt optimal est donné par

$$T^* = \begin{cases} \inf\{k \leq N-1 : \mathbb{E}[Z_{k+1}] \leq k/N, X_k = 1\} & \text{si cet infimum existe} \\ N & \text{sinon.} \end{cases}$$

6. Montrer que $\mathbb{E}[Z_n]$ décroît quand n croît. En déduire qu'il existe un entier $r \in [[1, N-1]]$ tel que $T^* = T_r$ où

$$T_r = \begin{cases} \inf\{r \leq k \leq N-1 : X_k = 1\} & \text{si cet infimum existe} \\ N & \text{sinon.} \end{cases}$$

7. Montrer que pour $1 \leq r \leq N$,

$$\mathbb{E}[Y_{T_r}] = \frac{r-1}{N} \sum_{k=r}^{N} \frac{1}{k-1} := G_N(r).$$

8. Montrer que $G_N([xN]) \to -x \log x$ quand $N \to \infty$ et que cette fonction limite admet un maximum en $x = 1/e \sim 0.37$. On en déduit que lorsque le nombre d'objets N tend vers l'infini, la stratégie optimale consiste à laisser défiler une proportion d'environ 37% d'objets sans en sélectionner, puis à choisir le premier objet meilleur que tous ceux qui l'ont précédés.

Exercice 6 (problème du parking). Vous conduisez une voiture sur une voie infinie à la recherche d'une place de stationnement. Bien sûr, les places ne sont pas toutes libres. Votre objectif est de vous garer le plus proche possible du théâtre, sachant que vous ne pouvez pas revenir en arrière. Vous voyez une place libre à distance d du théâtre. Faut-il s'y garer ?

On va modéliser ce problème à l'aide d'un modèle discret. Partant de l'origine, chaque entier positif sur la droite réelle correspond à une place de stationnement. Soient $X_0, X_1, \dots$ des v.a. de Bernoulli i.i.d. de paramètre $p \in]0,1[$. La n-ème place est occupée si et seulement si $X_n = 1$. On note N la position du théâtre. On peut donc s'arrêter à la place n ssi $X_n = 0$ et si on décide de s'y arrêter, on considère qu'on perd la quantité $|n - N|$. Etant au niveau de la place n, on ne peut pas voir si la place $n+1$ est libre et si on décide d'avancer, on ne peut plus revenir en arrière. Si on arrive au niveau de la place N, on s'y gare si elle est libre, et si elle n'est pas libre, alors on se garera à la première place libre trouvée en continuant, dans ce cas la perte moyenne attendue est $p(1-p) + 2p^2(1-p) + 3p^3(1-p) + \cdots = p/(1-p)$ (pourquoi ?).

1. Formuler précisément le problème d'arrêt optimal : donner la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in[[0,N]]}$, les pertes $(Y_n)_{n\in[[0,N]]}$ et préciser la définition d'optimalité pour un t.a. T.
2. Utiliser l'hypothèse d'indépendance des $X_n, n \in \mathbb{N}$ et la forme spécifique des pertes $Y_n, n \in [[0,N]]$ pour simplifier la forme de la fonction valeur Z et de la règle d'arrêt optimal associée.
3. Remarquer qu'il existe un entier $r \in [[0,N]]$ tel qu'un temps d'arrêt optimal est donné par $T^* = T_r$ où $T_N = N$ et pour $r \in [[0, N-1]]$,
$$T_r = \begin{cases} \inf\{r \le k \le N-1 : X_k = 0\} & \text{si cet infimum existe} \\ N & \text{sinon.} \end{cases}$$
4. Montrer que la perte moyenne $C(r) = \mathbb{E}[Y_{T_r}]$ est donnée par la formule
$$C(N-n) = n + 1 + \frac{2p^{n+1} - 1}{1-p}, \qquad n = 0, \dots, N$$
5. Trouver l'entier r optimal en fonction de p et N lorsque $p = 0.9$.

Exercice 7 (sum–of–the–odds). Soient $N \geqslant 1$ et $X_1, \ldots, X_N$ des v.a. indépendantes telles que $X_j \sim \text{Bernoulli}(p_j)$ avec $p_j \in (0,1)$, $j = 1, \ldots, N$. On observe les $X_j, 1 \leq j \leq N$ une par une (en suivant l'ordre de leurs indices) et on peut s'arrêter à tout moment. Si on s'arrête à l'instant j, on gagne si $X_j = 1$ et si $X_k = 0$ pour $j \leqslant k \leqslant N$ (c-à-d si X_j est la dernière v.a. à valoir 1).

Soit

$$L = \sup\{k \in [[1, N]] : X_k = 1\}$$

(avec la convention $\sup \emptyset = +\infty$). La probabilité de gagner en s'arrêtant à un temps d'arrêt T (de la filtration $(\mathcal{F}_n, 1 \leq n \leq N)$ engendrée par la suite $(X_n, 1 \leq n \leq N)$), $T \leq N$, est donc

$$V(T) := \mathbb{P}(T = L) = \mathbb{P}(X_T = 1, X_{T+1} = 0, \ldots, X_N = 0).$$

On veut maximiser cette probabilité parmi tous les t.a. T de la filtration $(\mathcal{F}_n, 1 \leq n \leq N)$, bornés par N. On note $V_N = \sup_{T \leq N, T \text{ t.a.}} V(T)$ le gain optimal pour le problème d'arrêt d'horizon N.

1. La v.a. L est-elle un temps d'arrêt ?
2. Considérons le processus adapté Y défini pour $k \leq N$ par $Y_k = \mathbb{P}(L = k | \mathcal{F}_k)$. Montrer que $Y_k = \prod_{j=k+1}^{N} (1 - p_j) \mathbb{1}_{X_k = 1}$.
3. Montrer que $V(T) = \mathbb{E}[Y_T]$ pour tout temps d'arrêt T borné par N.
4. Soit Z la fonction valeur du problème d'arrêt optimal associé. Montrer par un calcul explicite que $\mathbb{E}[Z_N | \mathcal{F}_{N-1}]$ est une constante.
5. Montrer par récurrence que $\mathbb{E}[Z_{k+1} | \mathcal{F}_k] = \mathbb{E}[Z_{k+1}]$ pour tout $k = 1, \ldots, N-1$.
6. Montrer que $\mathbb{E}[Z_k], k = 1, \ldots, N$ est une fonction décroissante de k.
7. Rappeler la définition vue en cours de $T^\star$ et démontrer que c'est bien un temps d'arrêt de la filtration $(\mathcal{F}_n, 1 \leq n \leq N)$.
8. Quelle est la propriété principale du processus arrêté $(Z_{k \wedge T^\star})_{k=1,\ldots,N}$?
9. Montrer qu'il existe un entier $r \in [[1, N]]$ tel que $T^\star = T_r$ où

   $$T_r = \inf_N \{k \in [[r, N]] : X_k = 1\},$$

   avec la convention $\inf(\emptyset) = N$.
10. Montrer que

    $$G(r) = V(T_r) = \left[\prod_{k=r}^{N} (1 - p_k)\right] \sum_{k=r}^{N} \frac{p_k}{1 - p_k}.$$

    et donc que la règle d'arrêt optimale est T_{r_*} où r_* est la valeur qui maximise $G(r)$.
11. Donner une expression de $\mathbb{E}[Z_1]$.
12. Calculer $G(r) - G(r-1)$ pour $r = 2, \ldots, N$ et donner une condition explicite de r_* en fonction des p_k.

13. Calculer r_* et $G(r_*)$ pour $N = 10$ et $p_k = 0.2$ pour $k = 1, \ldots, 10$.

Exercice 8 (partiel 2013 – 2014). Considérons un lac contenant $N \in \mathbb{N}^*$ poissons. On note T_i le temps nécessaire pour attraper le poisson numéro i et on suppose que $T_1, ..., T_N$ sont i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1. On verra ci-dessous que les temps $T_1, ..., T_N$ sont presque sûrement tous distincts. Admettons-le pour le moment. On note alors

$$T_{(1)} < T_{(2)} < ... < T_{(N)}$$

leur réarrangement croissant, puis

$$X_1 = T_{(1)} \quad \text{et} \quad X_i = T_{(i)} - T_{(i-1)},\ 2 \leq i \leq N.$$

La variable X_i représente donc le temps qui s'est écoulé entre le $(i-1)$ème et le $i$ème temps de pêche. Pour $1 \leq n \leq N$, on pose $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$, et pour $n = 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

On s'intéresse au problème d'arrêt suivant : au bout de combien de poissons péchés est-il optimal de s'arrêter sachant qu'on gagne 1 à chaque fois qu'on attrape un poisson et qu'on paye $c > 0$ fois le temps total requis ? Le processus de gain $(Y_n)_{n \in \{0,...,N\}}$ correspondant à ce problème est donc donné par

$$Y_n = n - cT_{(n)}$$

(avec la convention $T_{(0)} = 0$).

1. Montrer que $\mathbb{P}(T_i \neq T_j) = 1$ lorsque $1 \leq i \neq j \leq N$. En déduire que

$$\mathbb{P}\left(\exists (i,j) \in [[1, N]]^2, i \neq j : T_i = T_j\right) = 0$$

(le réarrangement strictement croissant de $T_1, ..., T_N$ a donc bien un sens presque sûrement).

2. (a) Montrer qu'une densité (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$) du $N-$uplet $(T_{(1)}, T_{(2)}, ..., T_{(N)})$ est donnée par

$$(t_1, ..., t_N) \ \mapsto \ N! \mathbb{1}_{\{0 < t_1 < ... < t_N\}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{N} t_i\right).$$

   (b) En déduire que les variables $X_i, 1 \leq i \leq N$ sont indépendantes et que X_i suit une loi exponentielle de paramètre $N - i + 1$.

   (c) Montrer que le processus $(Y_n)_{n \in \{0,...,N\}}$ est adapté à $(\mathcal{F}_n)_{n \in \{0,...,N\}}$ et intégrable.

3. On note $(Z_n)_{n \in \{0,...,N\}}$ l'enveloppe de Snell du processus $(Y_n)_{n \in \{0,...,N\}}$.

   (a) Calculer $\mathbb{E}[Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]$ en fonction de Y_n, c, N et n, pour $0 \leq n \leq N - 1$.

   (b) En déduire que pour tout n, Z_n peut s'exprimer comme une fonction mesurable (que l'on précisera) de Y_n.

(c) En déduire un temps d'arrêt optimal.

(d) Ce problème est-il à structure monotone ? Justifier votre réponse.

Exercice 9 (partiel 2015). Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration et $(Y_n)_{n\geq 0}$ un processus de gain adapté et dans L^1. On considère $N \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{T}_N$ l'ensemble des $\mathcal{F}-$ temps d'arrêt bornés par N. On étudie le problème d'arrêt optimal suivant :

$$\sup\{E(Y_T),\ T \in \mathcal{T}_N\}.$$

On dit qu'un temps d'arrêt est optimal s'il permet d'atteindre le sup.

1. (*Question de cours*) Rappeler la définition de la fonction valeur $(Z_n)_{n\geq 0}$. Prouver qu'il s'agit d'une sur-martingale. Rappeler, sans la redémontrer, la valeur du sup du problème considéré grâce au processus $(Z_n)_{n\geq 0}$.
2. Soit $S \in \mathcal{T}_N$ un temps d'arrêt optimal et $0 \leq n \leq N-1$. Prouver que $E(Z_{(n+1)\wedge S}) = E(Z_{n\wedge S})$.
3. En déduire que $(Z_{n\wedge S})_{n\geq 0}$ est une martingale puis que pour tout $0 \leq n \leq N-1$

$$E(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n)1_{S\geq n+1} = Z_n 1_{S\geq n+1} \quad p.s.$$

On définit le temps d'arrêt

$$T = \begin{cases} \inf\{k \leq N-1,\ Y_k > E(Z_{k+1}|\mathcal{F}_k)\} \text{ si l'ensemble considéré est non vide} \\ \text{N sinon} \end{cases}$$

On remarquera bien que **l'inégalité dans la définition est stricte**, ce qui définit un temps différent du temps optimal étudié dans le cours.

4. Montrer que $(Z_{n\wedge T})_{n\geq 0}$ est une martingale.
5. Montrer que T est un temps optimal.
6. Montrer que T est **le plus grand temps optimal** c'est-à-dire que pour tout $S \in \mathcal{T}_N$ optimal, $S \leq T$ p.s.

Exercice 10 (partiel 2015). Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $Ber(1/2)$. On définit le processus de gain Y par

$$Y_n = (2^n - 1)\prod_{i=1}^n X_i \qquad \forall n \geq 1.$$

On considère la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des $\mathcal{F}$-temps d'arrêt fini p.s. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{T}_N$ l'ensemble des temps d'arrêt bornés par N. On considère dans les deux premières questions **le problème en horizon fini** N.

1. Le problème est-il monotone ?
2. Donner un temps optimal et la valeur du maximum du problème.

On optimise maintenant sur $\mathcal{T}$. On s'intéresse donc à un problème dont l'**horizon n'est pas fini**.

3. Montrer qu'il n'existe pas de temps optimal pour ce problème.

Exercice 11 (Partiel 2016) On dispose d'une collection de N objets distincts et ordonnés que l'on nous présente successivement dans un ordre aléatoire. A chaque étape on doit décider si on choisit l'objet inspecté (dans ce cas le processus d'inspection s'arrête et on ne regardera pas les objets suivants) ou si on passe à l'inspection de l'objet suivant. On ne peut pas revenir en arrière. Si les $N-1$ premiers objets n'ont pas été choisis, on prend alors automatiquement le N-ième objet. L'objectif de cet exercice est de déterminer une stratégie d'arrêt nous permettant de minimiser le rang absolu (i.e. dans la collection complète) de l'objet choisi. On notera donc bien que le critère à optimiser diffère de celui vu dans l'exercice similaire traité en cours. On reprend en revanche les mêmes notations que l'on rappelle dans le paragraphe suivant.

On note S_N l'ensemble des permutations de N éléments, c'est -à-dire l'ensemble des bijections de $\{1, \cdots, N\}$ dans lui-même. Soit Σ une variable aléatoire **uniforme** à valeurs dans S_N. La valeur $\Sigma(i)$ représente le rang absolu du i-ème objet inspecté (on suppose que les objets ont tous une valeur différente).

A chaque étape n, on observe une variable aléatoire X_n qui donne le rang *relatif* du n-ème objet inspecté par rapport aux $n-1$ objets inspectés auparavant. On a donc

$$X_n = Card\{i \leq n,\ \Sigma(i) \leq \Sigma(n)\}, \qquad n = 1, \cdots, N$$

A chaque instant n, on connaît $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, la tribu engendrée par les rangs relatifs des n premiers objets.

Soit $\Xi_N = \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{N}^N : 1 \leqslant x_k \leqslant k, k = 1, \ldots, N\}$ l'ensemble des valeurs possibles pour le vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_N)$. Remarquons que X est une fonction mesurable de Σ. Plus précisément, l'application $\Psi : S_N \to \Xi$ qui associe à une permutation la suite correspondante des rangs relatifs est bijective (donc $X = \Psi \circ \Sigma$ et $\Sigma = \Psi^{-1} \circ X$) : étant donnée la suite de rangs relatifs $X_1, ..., X_N$, on peut reconstruire Σ.

Notre objectif est donc de trouver un temps d'arrêt T (pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$) borné par N qui **minimise** la quantité $E(\Sigma(T))$.

Les questions signalés par une $(*)$ *sont un peu plus calculatoires. On n'hésitera pas à admettre les résultats pour poursuivre le problème.*

1. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_N = x_N\right) = \frac{1}{N!}, \quad \forall (x_1, ..., x_N) \in \Xi.$$

2. Montrer que pour tout entier $n \in \{1, \cdots, N\}$ et tout entier $j \in \{1, \cdots n\}$,

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \frac{1}{n}.$$

En déduire que les variables $X_i, 1 \leq i \leq N$ sont indépendantes.

3. On définit le processus adapté Y par $Y_k = \mathbb{E}\left[\Sigma(k)\ |\mathcal{F}_k\right]$, $k \in \{1, N\}$. Montrer que pour tout temps d'arrêt T borné par N,

$$\mathbb{E}[\Sigma(T)] = \mathbb{E}[Y_T].$$

4. (*) Montrer que pour tout $n \in \{1, \cdots N\}, (i_1, \cdots, i_{n-1}, i) \in \Xi_n$ et $k \in \{1, \cdots N - (n-i)\}$,

$$P(\Sigma(n) = k | X_1 = i_1, \cdots, X_n = i) = P(\Sigma(n) = k | X_n = i) = \frac{\binom{k-1}{i-1}\binom{N-k}{n-i}}{\binom{N}{n}}.$$

5. (*) Vérifiez que pour tout $n \in \{1, \cdots N\}$, $E(\Sigma(n)|\mathcal{F}_n) = E(\Sigma(n)|X_n) = \frac{N+1}{n+1} X_n$.
Indication : on pourra utiliser (il y aura quelques points bonus pour la preuve ausi !) que pour $i \leq n$:

$$\sum_{k=i}^{N-(n-i)} \binom{k}{i}\binom{N-k}{n-i} = \binom{N+1}{n+1}.$$

6. Définir la fonction valeur (Z_n) adapté au problème et montrer que Z_n est mesurable par rapport à $\sigma(X_n)$, $\forall 1 \leq n \leq N$.
7. Que vaut $E[Z_N]$? Donner la relation de récurrence permettant de passer de $E[Z_{n+1}]$ à $E[Z_n]$ pour $n = 1, \cdots, N-1$.
8. En déduire qu'il existe une suite à valeurs entières $(s_i)_{i=1,\cdots N-1}$ (que l'on caractérisera par récurrence rétrograde) tel qu'un temps optimal soit donné par :

$$T^* = \begin{cases} \inf\{k \leq N-1 : X_k \leq s_k\} & \text{si cet infimum existe} \\ N & \text{sinon.} \end{cases}$$

9. Dans le cas $N = 4$, caractériser T^* en donnant la valeur de (s_1, s_2, s_3). Puis, calculer le rang moyen sélectionné quand on adopte la stratégie T^*.