Université Paris-Dauphine, Master 1 (Mathématiques approfondies)
Contrôle de chaînes de Markov (2017–2018)

Examen - Mercredi 19 Janvier 2018.

durée : 2h.

Les documents, calculatrices, téléphones et ordinateurs portables sont interdits.
Le barème proposé est indicatif.

Dans tout le sujet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ désigne un espace de probabilité.

Exercice 1. Caractérisation des temps optimaux. (8 *points*)
Soit $N \geq 1$ un entier et $(Y_n)_{0 \leq n \leq N}$ un processus dans L^1. On s'intéresse au problème d'arrêt optimal en horizon fini N et processus de gain $(Y_n)_{0 \leq n \leq N}$.

1. Quel problème d'optimisation cherche-t-on à résoudre ? Rappeler la définition du processus valeur $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$.
2. Donner, sans preuve, le plus petit temps d'arrêt optimal T^* pour notre problème. Rappeler également, toujours sans preuve, le gain moyen qu'il permet d'obtenir.

Soit T un temps d'arrêt borné par N. On dit que T satisfait la condition $(C1)$ si

$$(C1) \quad Z_T = Y_T \quad p.s.$$

et la condition $(C2)$ si

$$(C2) \quad (Z_{n \wedge T})_{n \geq 0} \text{ est une martingale.}$$

3. On suppose dans cette question que T satisfait $(C1)$ et $(C2)$. Montrer que T est optimal.

On veut maintenant montrer la réciproque : on suppose donc que T est optimal jusqu'à la fin de l'exercice.

4. Montrer que T satisfait la condition $(C1)$.
5. Montrer que la condition $(C2)$ est équivalente à $Z_{n \wedge T} = E(Z_T | \mathcal{F}_n)$ pour tout $n \leq N$.
6. Montrer que T satisfait $(C2)$.

Exercice 2. Optimisation et horticulture. (12 *points*)
Soit $N \geq 1$ un entier. Un horticulteur cultive des fleurs entre les années 0 et N. Le nombre de pieds dont il dispose au début de l'année $n \leq N$ est noté X_n.

- À l'été de l'année $n \leq N$, chaque pied du stock donne naissance à une pousse. À la fin de l'été, l'horticulteur choisit de garder une proportion $A_n \in [0, 1]$ des pousses de l'été et vend les autres pousses au prix unitaire de 1 Euro.
- Parmi les pousses qu'il a conservées, une proportion aléatoire $Y_n \in [0, 1]$ survit durant l'automne. Ces pousses ayant survécu à l'automne deviennent alors des pieds à l'hiver, rejoignent le stock (donneront donc des pousses sur les périodes suivantes) et ne meurent pas avant l'année N.
- Au début l'année N il vend tout son stock au prix unitaire de 1 Euro sans attendre les pousses de l'été.

On suppose que $X_0 = x_0 > 0$ et que les $(Y_n)_{0 \leq n \leq N}$ sont des variables aléatoires iid de loi μ et de moyenne $m \in]0, 1]$.

1. Exprimer X_{n+1} en fonction des données de l'année n.
2. On prend $\mathcal{S} = \mathbb{R}^+$ comme espace d'états. Proposer un espace d'actions $\mathcal{A}$. Définir le système dynamique aléatoire contrôlé associé à l'énoncé. Donner également la chaîne de Markov contrôlée associée à l'énoncé en définissant soigneusement la dynamique. Définir le noyau Q associé à cette dynamique.
3. Définir la fonction de gain g puis la fonction valeur. Ecrire le problème d'optimisation que l'on cherche à résoudre.
4. Que vaut $V(N, \cdot)$? Ecrire pour $n \in \{0, \cdots, N-1\}$ l'équation de Bellman reliant $V(n, \cdot)$ et $V(n+1, \cdot)$.
5. Montrer qu'il existe des réels $\alpha_0, \cdots, \alpha_N$ tels que pour tout $n \leq N$ et tout $x \in \mathcal{S}$, $V(n, x) = \alpha_n x$. Exprimer α_n en fonction de α_{n+1}. Montrer que pour tout n, $\alpha_n > \alpha_{n+1}$ et $\alpha_n \geq 1 + N - n$. Discuter la monotonie que l'on vient d'établir.
6. On suppose pour cette question que $m < 1$. Montrer qu'il existe $K \in \{0, \cdots, N-1\}$ tel que le contrôle optimal est donné par $u_n = 1$ pour $n < K$ et $u_n = 0$ pour $n \geq K$.
7. On suppose maintenant $m = 1$. Que devient notre problème ? Donner la stratégie optimale et la commenter.

Université Paris-Dauphine, Master 1 (Mathématiques approfondies)
Contrôle de chaînes de Markov (2017–2018)

Examen - Mercredi 19 Janvier 2018.

durée : 2h.

Exercice 1. Caractérisation des temps optimaux.

1. C'est du cours.
2. Cours également. Le temps $T*$ permet le gain moyen $E(Z_0)$.
3. D'après $(C1)$, $E(Y_T) = E(Z_T)$. Or $E(Z_T) = E(Z_{N\wedge T})$ et comme, d'après $(C2)$, $(Z_{n\wedge T})_{n\geq 0}$ est une martingale, $E(Z_{N\wedge T}) = E(Z_{0\wedge T}) = E(Z_0)$. Le temps T est donc optimal.
4. Comme $Y_T \leq Z_T$ p.s., il nous suffit de prouver que $E(Y_T) \geq E(Z_T)$. Comme T est optimal, $E(Y_T) = E(Z_0)$. Comme $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une surmartingale et T est borné par N, $E(Z_0) \geq E(Z_{N\wedge T}) = E(Z_T)$ et on obtient l'inégalité qui nous permet de conclure.
5. Il est clair que $(E(Z_T|\mathcal{F}_n))_{n\geq 0}$ est une martingale. Réciproquement, supposons que $(Z_{n\wedge T}))_{n\geq 0}$ est une martingale. Elle converge p.s. et dans L^1 (car T borné) vers Z_T donc est fermée par Z_T.
6. Comme $(Z_{n\wedge T})$ est une surmartingale, on a déjà pour tout $n \geq 0$, $Z_{n\wedge T} \geq E(Z_{N\wedge T}|\mathcal{F}_n) = E(Z_T|\mathcal{F}_n)$ p.s. Il nous reste donc uniquement à prouver $E(Z_{n\wedge T}) \leq E[E(Z_T|\mathcal{F}_n)]$ ou encore $E(Z_{n\wedge T}) \leq E(Z_T)$. Or T est optimal donc satisfait $(C1)$ d'après la question 4, on a donc $E(Z_T) = E(Y_T) = E(Z_0)$. Comme $(Z_{n\wedge T})$ est une surmartingale, on a aussi $E(Z_{n\wedge T}) \leq E(Z_0)$. Finalement $E(Z_{n\wedge T}) = E(Z_T) = E(Z_0)$ et on peut conclure.

Exercice 2. Optimisation et horticulture.

1. On a $X_{n+1} = X_n + A_n X_n Y_n$ pour tout $n \leq N$.
2. L'espace d'action est $\mathcal{A} = [0, 1]$. Pour définir le système dynamique aléatoire contrôlé, on utilise la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ comme suite d'innovations. Enfin la fonction de récurrence (homogène en temps) est donnée par

$$G(x, a, y) = x(1 + ay) \qquad \text{pour tout} x \in \mathcal{S},\ a \in \mathcal{A}, y \in [0, 1]$$

   Pour la dynamique contrôlée on peut donc définir

$$\mathcal{P}(x, a)(A) = P(x(1+aY) \in A) = \mu(\{y \text{ t.q. } x(1+ay) \in A\}) \text{ pour tout } x \in \mathcal{S},\ a \in \mathcal{A}, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

3. Pour la fonction de gain g, on prend la fonction définie par

$$g(N, x, a) = x \text{ et } g(n, x, a) = (1 - a)x \text{ pour tout } x \in \mathcal{S},\ a \in \mathcal{A}, n \leq N - 1.$$

   Pour tout contrôle $u \in \mathcal{C}_n$ on définit la fonction

$$V^u(n, x) = E(\sum_{k=n}^{N} g(k, X_k, U_k)) \text{ avec } U_k = u(n, (X_k, \cdots, X_n)),$$

   puis la fonction valeur

$$V(n, x) = \sup\{V^u(n, x),\ u \in \mathcal{C}_n\}$$

4. On a $V(N,x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par ailleurs V satisfait l'équation de Bellman

$$V(n,x) = \sup_{a\in[0,1]} g(n,x,a) + QV(n,x,a) = \sup_{a\in[0,1]} g(n,x,a) + E(V(n+1, G(x,a,Y)))$$

où $Y \rightsquigarrow Y_1$.

5. On prouve cette propriété par récurrence descendante. Elle vraie pour N en posant $\alpha_N = 1$ puisque $V(N,x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $n+1 \leq N$. On suppose qu'il existe α_{n+1} tel que $V(n+1,x) = \alpha_{n+1}x$. L'équation de Bellman devient alors, en notant $m = E(Y)$

$$\begin{aligned} V(n,x) &= \sup_{a\in[0,1]} g(n,x,a) + E(\alpha_{n+1}x(1+aY)) \\ &= x \sup_{a\in[0,1]} (1-a) + \alpha_{n+1}(1+am) \\ &= x\{1 + \alpha_{n+1} + \sup_{a\in[0,1]} a(\alpha_{n+1}m - 1)\} \end{aligned}$$

En posant $\alpha_n = 1 + \alpha_{n+1} + \sup_{a\in[0,1]} a(\alpha_{n+1}m - 1)$, on vérifie l'hypothèse au temps n. Comme le sup est positif (en prenant $a = 0$) on obtient bien que $\alpha_n \geq \alpha_{n+1} + 1$, en particulier la suite α est décroissante. Comme $\alpha_N = 1$, par récurrence rétrograde on en déduit également que $\alpha_n \geq 1 + N - n$.

6. On cherche un contrôle markovien qui permet de saturer Bellman. On note que pour $n \leq N$, le sup est atteint en 0 si $\alpha_{n+1}m - 1 \leq 0$ et 1 si $\alpha_{n+1}m - 1 \geq 0$. On note donc $K := \inf\{k \text{ tel que } \alpha_{k+1}m - 1 \leq 0\}$. Comme $m < 1$ et $\alpha_N = 1$, on note que $K \leq N-1$. Un contrôle optimal markovien est donc $u(k,x) = 1_{k<K}$. La bonne stratégie consiste donc à garder toutes les pousses jusqu'au temps $K-1$ puis à tout vendre systématiquement toutes les pousses à partir de l'année K.

7. Si $m = 1$, le problème devient déterministe puisque les variables (Y_i) sont égales à 1. Puisque toutes les pousses survivent la meilleure stratégie est certainement de toutes les garder. On retrouve en effet dans ce cas que $K = N-1$. L'horticulteur garde donc toutes ses pousses jusqu'à l'année $K-1$ où il les vend (il obtient d'ailleurs le même résultat en les gardant aussi en $K-1$ puisque le sup est atteint également n'importe où sur $[0,1]$. Ca n'est pas étonnant puisque les pousses de l'année $K-1$ seront de toutes façon vendues avant de donner elles-mêmes de nouvelles pousses l'année N. Vendre les pousses de l'année $N-1$ ou les garder jusqu'au début de l'année N revient donc au même dans ce cas).