Université Paris-Dauphine, Master 1 (Mathématiques approfondies)
Contrôle de chaînes de Markov 1 (2015-2016)

Partiel - Jeudi 5 Novembre 2015.

durée : 2h.

Les documents, calculatrices, téléphones et ordinateurs portables sont interdits.
La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.
Le barème est donné à titre indicatif.

Dans tout le sujet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace de probabilités.

Exercice 1. (3 *pts*) Soit X une variable de L^2 et $\mathcal{F}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. On note $Y = E[X|\mathcal{F}]$.

1. Montrer que $Y \in L^2$.
2. On suppose maintenant que $E[X^2] = E[Y^2]$. Montrer que $X = Y$ p.s.

Exercice 2. (3 *pts*). Montrer le théorème de convergence monotone conditionnelle :
Soit $\mathcal{F}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de variables aléatoires positives, dans L^1 et convergeant p.s. vers $X \in L^1$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} E[X_n|\mathcal{F}] = E[X|\mathcal{F}] \quad p.s.$$

Exercice 3. (8 *pts*) Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration et $(Y_n)_{n\geq 0}$ un processus de gain adapté et dans L^1. On considère $N \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{T}_N$ l'ensemble des $\mathcal{F}-$ temps d'arrêt bornés par N. On étudie le problème d'arrêt optimal suivant :

$$\sup\{E(Y_T),\ T \in \mathcal{T}_N\}.$$

On dit qu'un temps d'arrêt est optimal s'il permet d'atteindre le sup.

1. (*Question de cours*) Rappeler la définition de la fonction valeur $(Z_n)_{n\geq 0}$. Prouver qu'il s'agit d'une sur-martingale. Rappeler, sans la redémontrer, la valeur du sup du problème considéré grâce au processus $(Z_n)_{n\geq 0}$.
2. Soit $S \in \mathcal{T}_N$ un temps d'arrêt optimal et $0 \leq n \leq N-1$. Prouver que $E(Z_{(n+1)\wedge S}) = E(Z_{n\wedge S})$.
3. En déduire que $(Z_{n\wedge S})_{n\geq 0}$ est une martingale puis que pour tout $0 \leq n \leq N-1$

$$E(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n)1_{S\geq n+1} = Z_n 1_{S\geq n+1} \quad p.s.$$

On définit le temps d'arrêt

$$T = \begin{cases} \inf\{k \leq N-1,\ Y_k > E(Z_{k+1}|\mathcal{F}_k)\} \text{ si l'ensemble considéré est non vide} \\ \text{N sinon} \end{cases}$$

On remarquera bien que **l'inégalité dans la définition est stricte**, ce qui définit un temps différent du temps optimal étudié dans le cours.

4. Montrer que $(Z_{n\wedge T})_{n\geq 0}$ est une martingale.
5. Montrer que T est un temps optimal.
6. Montrer que T est **le plus grand temps optimal** c'est-à-dire que pour tout $S \in \mathcal{T}_N$ optimal, $S \leq T$ p.s.

Exercice 4. (6 *pts*) Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $Ber(1/2)$. On définit le processus de gain Y par

$$Y_n = (2^n - 1)\prod_{i=1}^{n} X_i \qquad \forall n \geq 1.$$

On considère la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des $\mathcal{F}$-temps d'arrêt fini p.s. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{T}_N$ l'ensemble des temps d'arrêt bornés par N. On considère dans les deux premières questions **le problème en horizon fini** N.

1. Le problème est-il monotone ?
2. Donner un temps optimal et la valeur du maximum du problème.

On optimise maintenant sur $\mathcal{T}$. On s'intéresse donc à un problème dont l'**horizon n'est pas fini**.

3. Montrer qu'il n'existe pas de temps optimal pour ce problème.