Université Paris-Dauphine, Master 1 (Mathématiques approfondies)
Contrôle de chaînes de Markov (2018-2019)

Partiel - Mercredi 31 octobre 2018.

durée : 2h.

Les documents, calculatrices, téléphones et ordinateurs portables sont interdits.

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Le barème est donné à titre indicatif.

Dans tout le sujet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ désigne un espace de probabilités.

Exercice 1. (*14 pts*) On présente successivement N objets à un joueur qui a la possibilité d'en choisir un et un seul selon la procédure suivante. Au temps $1 \leq n \leq N$, il inspecte l'objet n : il peut décider de le choisir, et dans ce cas le processus d'inspection s'arrête (et il ne regardera donc pas les objets suivants) ou de le laisser et de passer à l'inspection de l'objet suivant. On ne peut pas revenir en arrière.

Si le joueur choisit le meilleur objet, il gagne $a > 0$, où a est un réel strictement positif, s'il choisit un objet et que ça n'est pas le meilleur, il gagne $-b$ (ou de façon équivalente perd b), où b est un réel strictement positif. S'il décide de ne pas choisir d'objet (c'est-à-dire de tous les laisser passer) il gagne 0. L'objectif de cet exercice est de déterminer une stratégie d'arrêt permettant de maximiser le gain moyen associé à ce jeu.

On considère donc un problème à horizon fini N. On note S_N l'ensemble des permutations de $\{1, \cdots, N\}$. On considère $\Sigma : \Omega \to S_N$ une variable aléatoire *uniforme* à valeurs dans S_N. La valeur Σ_i représente le rang absolu du i-ème objet inspecté (on suppose que les objets ont tous une valeur différente). Par exemple si $\Sigma_i(\omega) = 1$, le meilleur objet est dans la position i. On remarque qu'on ne peut pas observer directement $\Sigma(\omega)$ (on ne connaît le classement absolu des N objets qu'une fois qu'on les a tous inspectés). A chaque étape $n \in \{1, \cdots, N\}$, on observe une variable aléatoire X_n qui donne le rang *relatif* du n-ème objet inspecté par rapport aux $n-1$ objets inspectés auparavant. Donc $X_1 = 1$, $X_2 \in \{1, 2\}$,...,$X_n \in \{1, \ldots, n\}$. On note que $X_N = \Sigma_N$ puisqu'une une fois qu'on a inspecté tous les objets on connaît leur classement absolu. Par exemple : si $N = 4$ et $\Sigma(\omega) = (3, 4, 1, 2)$ alors $X_1(\omega) = 1, X_2(\omega) = 2, X_3(\omega) = 1, X_4(\omega) = 2$. A chaque instant $n \leq N$, on connaît $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, la tribu engendrée par les rangs relatifs des n premiers objets.

Soit $\Xi = \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{N}^N : 1 \leqslant x_k \leqslant k, k = 1, \ldots, N\}$ l'ensemble des valeurs possibles pour le vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_N)$. Remarquons que X est une fonction mesurable de Σ. Plus précisément, l'application $\Psi : S_N \to \Xi$ qui associe à une permutation la suite correspondante des rangs relatifs est bijective, donc $X = \Psi \circ \Sigma$ et $\Sigma = \Psi^{-1} \circ X$: étant donnée la suite de rangs relatifs $X_1(\omega), ..., X_N(\omega)$, on peut reconstruire $\Sigma(\omega)$.

Notre objectif est de trouver un temps d'arrêt $T \in \{1, \cdots, N\}$ (pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{1 \leq n \leq N}$) qui maximise la quantité $E[Y_T]$ où $(Y_k)_{k \leq N}$ est défini par

$$\begin{aligned} &Y_k = a 1_{\Sigma_k = 1} - b 1_{\Sigma_k > 1} = (a+b)\ 1_{\Sigma_k = 1} - b \qquad \text{si } 1 \leq k \leq N-1 \quad \text{et} \\ &Y_N = a 1_{\Sigma_N = 1}. \end{aligned}$$

1. Justifier brièvement le choix de $(Y_k)_{1 \leq k \leq N}$ et notamment celui de Y_N.
2. Montrer que

$$\mathrm{P}\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_N = x_N\right) = \frac{1}{N!}, \quad \forall (x_1, ..., x_N) \in \Xi.$$

3. Montrer que pour tout entier $n \in [[1, N]]$ et tout entier $j \in [[1, n]]$,

$$\mathrm{P}(X_n = j) = \frac{1}{n},$$

et en déduire que les variables $X_i, 1 \leq i \leq N$ sont indépendantes.

4. On définit le processus adapté $(\tilde{Y})_{k=1,\cdots,N}$ par $\tilde{Y}_k = \mathbb{E}\left[Y_k \mid \mathcal{F}_k\right]$, pour $k \in \{1, \cdots, N\}$. Montrer que pour tout temps d'arrêt T borné par N,

$$E[Y_T] = \mathbb{E}[\tilde{Y}_T].$$

5. Montrer que pour tout $n \leq N - 1$,

$$\tilde{Y}_n = 1_{\{X_n=1\}} \frac{(a+b)n}{N} - b$$

(en particulier $\tilde{Y}_n$ est mesurable par rapport à $\sigma(X_n)$). Montrer également que $\tilde{Y}_N = a 1_{\{X_N=1\}}$.

6. Montrer que le processus valeur $(Z_n)_{n=1,\cdots,N}$ (associée à $(\tilde{Y})_{n=1,\cdots,N}$) est bien défini et que, pour tout $1 \leq n \leq N$, Z_n est mesurable par rapport à $\sigma(X_n)$. En déduire qu'un temps d'arrêt optimal est donné par

$$T^* = \begin{cases} \inf \left\{ k \leq N-1 : \mathbb{E}[Z_{k+1}] \leq \frac{(a+b)k}{N} - b, X_k = 1 \right\} & \text{si cet infimum existe} \\ N & \text{sinon.} \end{cases}$$

7. Montrer que $\mathbb{E}[Z_n]$ décroît quand n croît. En déduire qu'il existe un entier $r \in \{1, \cdots, N\}$ tel que $T^* = T_r$ où

$$T_r = \begin{cases} \inf \{r \leq k \leq N-1 : X_k = 1\} & \text{si l'ensemble est non vide} \\ N & \text{sinon.} \end{cases}$$

8. Montrer que pour $1 \leq r \leq N - 1$,

$$\mathbb{E}[Y_{T_r}] = \sum_{k=r}^{N-1} (\frac{(a+b)k}{N} - b) \frac{r-1}{k(k-1)} + \frac{a(r-1)}{N(N-1)} := G_N(r).$$

Calculer également $G_N(N) = E[Y_{T_N}]$.

9. Pour $x \in [0, 1]$, déterminer la limite $f(x)$ de $G_N([xN])$ quand $N \to \infty$. (discuter brièvement l'uniformité de cette convergence). En déduire la stratégie optimale quand N est grand. Quel est le gain moyen asymptotique pour un joueur utilisant cette stratégie optimale ? Retrouver que ce gain moyen est toujours positif.

Exercice 2. (*6 pts*) Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires positives et $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ une suite de sous-tribus de $\mathcal{F}$ (pas nécessairement un filtration). On suppose que $(E[X_n|\mathcal{F}_n])_{n \geq 0}$ converge en probabilité vers 0. Le but de l'exercice est de montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ converge également en probabilité vers 0.

1. Soit X une variable aléatoire positive et $A \in \mathcal{F}$ un événement. Montrer que pour tout $a > 0$

$$\mathrm{P}(\{X > a\} \cap A) \leq \frac{1}{a} E(X 1_A).$$

2. Pour tout $n \geq 0$, on définit $A_n = \{E[X_n|\mathcal{F}_n] > \frac{\epsilon^2}{2}\}$. Montrer que $E(X_n 1_{A_n^c}) \leq \frac{\epsilon^2}{2}$.
3. Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ converge en probabilité vers 0.
4. Montrer par un contre-exemple que la réciproque est fausse.

Université Paris-Dauphine, Master 1 (Mathématiques approfondies)
Contrôle de chaînes de Markov (2018-2019)

Eléments de corrigé du partiel - Mercredi 31 octobre 2018.

durée : 2h.

Dans tout le sujet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ désigne un espace de probabilités.

Exercice 1.

1. Pour $k \leq N-1$ il ne reste qu'une des deux indicatrices ce qui correspond bien au jeu décrit. Si on a choisit le meilleur objet la première indicatrice vaut 1 et la seconde 0 donc le gain est a. Si au contraire on a choisit un objet et que ça n'est pas le meilleur la première indicatrice est nulle et la seconde vaut 1 le gain vaut donc $-b$.
   Pour N, la situation est un peu différente. Puisque c'est le dernier objet on sait s'il est le meilleur où non. On le prend donc si c'est le meilleur et on gagne a sinon on ne le choisit pas (pour ne pas perdre b) et on gagne donc 0.
2. Cette question a été traitée en TD. Brièvement, pour $x \in \Xi$ Montrer que
$$\mathrm{P}\left(X = x\right) = \mathrm{P}\left(\Sigma = \Psi^{-1}(x)\right) = \frac{1}{N!}.$$
3. Cette question a été traitée en TD. Pour tout entier $n \in [[1, N]]$ et tout entier $j \in [[1, n]]$, et $k \in [[1, n]]$
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X_n = j) &= \mathrm{P}(\Sigma_n \text{ est la j-ieme position dans la collection } \{\Sigma_1, \cdots, \Sigma_n\}) \\ &= \mathrm{P}(\Sigma \circ (\tau_{kn})_n \text{ est la j-ieme position dans la collection } \{\Sigma_1, \cdots, \Sigma_n\}) \\ &= \mathrm{P}(\Sigma_k \text{ est la j-ieme position dans la collection } \{\Sigma_1, \cdots, \Sigma_n\})\end{aligned}$$
   où τ_{kn} est la transposition qui échange k et n. Le passage de la seconde à la troisième ligne est justifié par le fait que $\Sigma \circ (\tau_{kn})$ est encore de loi uniforme sur l'ensemble des permutations. On déduit donc que $\mathrm{P}(X_n = j) = 1/n$. On a donc bien pour tout $x \in \Xi$
$$\prod_{i=1}^{N} \mathrm{P}\left(X_i = x_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}\frac{1}{i} = \frac{1}{N!} = \mathrm{P}\left(X = x\right).$$
   et les X_i sont donc indépendants.
4. Cette question a été traitée en TD. On définit le processus adapté $\tilde{Y}$ par $\tilde{Y}_k = \mathbb{E}\left[Y_k \mid \mathcal{F}_k\right]$, $k \in \{1, \cdots, N\}$. Montrer que pour tout temps d'arrêt T borné par N,
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_T] &= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}[Y_k 1_{T=k}] \\ &= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}[\tilde{Y}_k 1_{T=k}] \\ &= \mathbb{E}[\tilde{Y}_T]\end{aligned}$$

où le passage de la première à la seconde ligne vient de la définition de l'espérance conditionnelle. On vient donc de prouver que le problème d'optimisation que l'on se propose de résoudre est identique au problème $\sup\{E(\tilde{Y}_T), T$ tda borné par $N\}$. On retombe donc dans le cadre du cours puisque le processus $\tilde{Y}$ est adapté et dans L^1.

5. Pour $n \leq N-1$,

$$\tilde{Y}_n = E(Y_n|\mathcal{F}_n) = E((a+b)1_{\{\Sigma_n=1\}} - b).$$

Or $\{\Sigma_n = 1\} = \{X_n = 1, X_{n+1} \geq 2, \cdots, X_N \geq 2\}$, donc, en utilisant la question 2, on obtient

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_n &= (a+b)1_{\{X_n=1\}} \prod_{i=n+1}^{N} \mathrm{P}(X_i \geq 2) - b \\ &= (a+b)1_{\{X_n=1\}} \frac{n}{N} - b.\end{aligned}$$

Par ailleurs, comme $\{\Sigma_N = 1\} = \{X_N = 1\} \in \mathcal{F}_N$, on a $\tilde{Y}_N = a1_{\{X_N=1\}}$. On a bien prouvé en particulier que pour tout $n = 1, \cdots, N$, $\tilde{Y}_n$ est mesurable par rapport à $\sigma(X_n)$.

6. On est bien dans le cadre du cours puisque le processus $\tilde{Y}$ est intégrable et adapté, on peut donc définir par récurrence rétrograde son enveloppe de Snell que l'on appelle (Z_n). De plus on peut montrer par récurrence rétrograde que pour tout $1 \leq n \leq N$, Z_n est mesurable par rapport à $\sigma(X_n)$. En particulier Z_{k+1} est indépendant de $\mathcal{F}_k$ et on a donc $E(Z_{k+1}|\mathcal{F}_k) = E(Z_{k+1})$ On peut donc réécrire le temps d'arrêt optimal T^* :

$$T^* = \begin{cases} \inf\left\{k \leq N-1 : E[Z_{k+1}] \leq (a+b)1_{\{X_k=1\}}\frac{n}{N} - b\right\} & \text{si cet infimum existe} \\ N & \text{sinon.} \end{cases}$$

ou encore, comme $E(Z_k) > 0$:

$$T^* = \begin{cases} \inf\left\{k \leq N-1 : E[Z_{k+1}] \leq \frac{(a+b)k}{N} - b, X_k = 1\right\} & \text{si cet infimum existe} \\ N & \text{sinon.} \end{cases}$$

7. Comme $(Z_k)_{k=1,\cdots,N}$ est une surmartingale, le processus est décroissant en espérance. Au contraire la suite $(\frac{(a+b)k}{N} - b)_{k\geq 0}$ est croissante en k. On note donc $r = \inf\{k \leq N-1 \;\; E[Z_{k+1}] \leq \frac{(a+b)k}{N} - b\}$ et $r = N$ si cet ensemble est vide. On peut donc réécrire $T^* = T_r$ où

$$T_r = \begin{cases} \inf\{r \leq k \leq N-1 : X_k = 1\} & \text{si cet infimum existe} \\ N & \text{sinon.} \end{cases}$$

8. Pour $1 \leq r \leq N-1$,

$$E[Y_{T_r}] = \sum_{k=r}^{N-1} E[\tilde{Y}_k 1_{\{T_r=k\}}] + E[\tilde{Y}_N 1_{\{T_r=N\}}]$$
$$= \sum_{k=r}^{N-1} E[((a+b)\frac{n}{N} - b)1_{\{T_r=k\}}] + E[a1_{\{X_N=1\}}1_{\{T_r=N\}}]$$
$$= \sum_{k=r}^{N-1} ((a+b)\frac{k}{N} - b)\mathrm{P}[X_r \geq 2, , \cdots, X_{k-1} \geq 2, X_k = 1] + a\mathrm{P}(X_r \geq 2, \cdots, X_{N-1} \geq 2, X_N = 1)$$
$$= \sum_{k=r}^{N-1} ((a+b)\frac{k}{N} - b)\frac{r-1}{(k-1)k} + a\frac{r-1}{(N-1)N}$$

Par ailleurs $E[Y_{T_N}] = E(Y_N) = a\mathrm{P}(X_N = 1) = \frac{a}{N}$.

9. Pour $x \in [0,1[$, le calcul montre que $G_N([xN])$ tend vers $-(a+b)x\ln(x) - b + bx$ quand $N \to \infty$ et on peut vérifier que cette convergence est uniforme. Le profil asymptotique est donc donné par $x \to -(a+b)x\ln(x) - b + bx$. Cette fonction atteint son maximum en $x_* = \exp(-a/(a+b))$. La bonne stratégie est donc de laisser passer une proportion x_* d'objets puis de prendre le premier qui se présente qui est meilleur que les précédents. cette stratégie permet de gagner asymptotiquement $-(a+b)x_*\ln(x_*) - b + bx_* = (a+b)\exp(-a/(a+b)) - b$. Ce gain est toujours positif car, en posant $c = a/(a+b)$ le gain est positif si et seulement si $e^{-c} \geq 1 - c$ ce qui est bien vrai pour tout $c \in [0,1]$.

Exercice 2.

1. Pour tout $a > 0$
$$a1_{\{X>a\}}1_A \leq X1_A,$$
et on en déduit le résultat demandé en passant à l'espérance.
$$\mathrm{P}(\{X > a\} \cap A) \leq \frac{1}{a}E(X1_A).$$

2. Soit $n \geq 0$, d'après la définition de l'espérance conditionnelle,
$$E(X_n 1_{A_n^c}) = E(E[X_n|\mathcal{F}_n]1_{A_n^c}) \leq \frac{\epsilon^2}{2}.$$

3. Soit $\epsilon > 0$. Montrons que pour n assez grand $\mathrm{P}(|X_n| > \epsilon) \leq \epsilon$. Comme X_n est positive, $\mathrm{P}(|X_n| > \epsilon) = \mathrm{P}(X_n > \epsilon) \leq \mathrm{P}(X_n > \epsilon, A_n) + \mathrm{P}(X_n > \epsilon, A_n^c)$. Comme $(E(X_n|\mathcal{F}_n))$ converge en probabilité vers 0, pour n assez grand $\mathrm{P}(|X_n| > \epsilon, A_n) \leq \mathrm{P}(A_n) < \epsilon/2$.
Par ailleurs d'après la question 1, $\mathrm{P}(|X_n| > \epsilon, A_n^c) \leq \frac{1}{\epsilon}E(X_n 1_{A_n^c})$. Or d'après la question 2, $E(X_n 1_{A_n^c}) \leq \frac{\epsilon^2}{2}$. Finalement on a bien $\mathrm{P}(|X_n| > \epsilon, A_n^c) \leq \epsilon/2$.
On a donc bien montré que $\mathrm{P}(|X_n| > \epsilon) \leq \epsilon$ pour n assez grand. Et cela implique que $(\mathrm{P}(|X_n| > \epsilon))$ tend vers 0 quand n tend veers $+\infty$.

4. On prend pour tout $n \geq 0$, $\mathcal{F}_n = \{\emptyset, \Omega\}$. On a donc pour tout $n \geq 0$, $E(X_n|\mathcal{F}_n) = E(X_n)$. Si on prend une suite de v.a. positives qui convergents en probabilités vers 0 mais pas dans $L1$, on tient notre contre-exemple. On peut se placer sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), Unif([0,1]))$ et définir pour $n \geq 1$, $X_n = n^2 1_{[0,1/n]}$. On a bien $\|X_n\|_1 \to +\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et $X_n \to 0$ en probabilité.