
Processus discrets
TD2. Martingales I

Exercice 1. Soient S et T des temps d'arrêt. Les variables $S \wedge T$, $S \vee T$ et $S + T$ sont-elles des temps d'arrêt ? On suppose que $T \geq 1$ p.s. Est-ce que $T - 1$ est un temps d'arrêt ?

Exercice 2. Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables i.i.d. On suppose que les Y_n sont intégrables et on pose $m = \mathbb{E}[Y_1]$. Soit (\mathcal{F}_n) la filtration naturelle des (Y_n) . Pour $n \geq 1$ on pose

$$S_n = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad M_n = \prod_{i=1}^n Y_i.$$

1. Montrer que le processus $(S_n - nm)$ est une martingale.
2. On suppose que $m \neq 0$. Montrer que le processus $(M_n m^{-n})$ est une martingale.

Exercice 3. Soit (M_n) une martingale par rapport à une filtration donnée, montrer que (M_n) est aussi une martingale par rapport à sa filtration naturelle.

Exercice 4. Soit (M_n) une sous-martingale vérifiant $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0]$ pour tout n . Montrer que (M_n) est une martingale.

Exercice 5. Soit (M_n) une sur-martingale positive et soit

$$T = \inf\{n \geq 0 : M_n = 0\}.$$

Montrer qu'avec probabilité 1, on a $M_n = 0$ pour tout $n \geq T$. Autrement dit, une sur-martingale positive qui touche 0 reste en 0.

Exercice 6. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soit (\mathcal{F}_n) une filtration.

1. Montrer que pour tout entier n et pour tout $A \in \mathcal{F}_n$ la variable $T_A = (n+1)\mathbb{1}_A + n\mathbb{1}_{A^c}$ est un temps d'arrêt borné.
2. Soit (M_n) un processus adapté et intégrable. Montrer que (M_n) est une martingale si et seulement si $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$ pour tout temps d'arrêt borné T .

Exercice 7 (Inégalité maximale de Doob). Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une sous-martingale positive. On pose pour tout $n \geq 0$

$$M_n^* = \max\{M_0, M_1, \dots, M_n\}.$$

L'objectif de cet exercice est de démontrer les inégalités maximales de Doob : pour tout entier n on a

$$\sup_{a>0} \{a \mathbb{P}(M_n^* \geq a)\} \leq \mathbb{E}[M_n], \quad (1)$$

$$\|M_n^*\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|M_n\|_p, \quad \forall p \in]1, +\infty[, \quad (2)$$

1. On fixe $a > 0$ et on pose $T = \inf\{n \geq 0 : M_n \geq a\}$. Montrer que T est un temps d'arrêt.
2. Montrer que pour tout entier n

$$\mathbb{E}[M_T \mathbb{1}_{\{T \leq n\}}] \leq \mathbb{E}[M_n \mathbb{1}_{\{T \leq n\}}].$$

3. En déduire que pour tout $a > 0$ on a

$$a \mathbb{P}(M_n^* \geq a) \leq \mathbb{E}[M_n \mathbb{1}_{\{M_n^* \geq a\}}],$$

puis l'inégalité (1).

4. Soit $p \in]1, +\infty[$. Montrer que

$$\mathbb{E}[(M_n^*)^p] = \int_0^{+\infty} p a^{p-1} \mathbb{P}(M_n^* \geq a) da.$$

5. En appliquant le résultat de la question 3. montrer que

$$\mathbb{E}[(M_n^*)^p] \leq \frac{p}{p-1} \mathbb{E}[M_n (M_n^*)^{p-1}].$$

6. En déduire l'inégalité (2).