Université Paris-Dauphine — Année 2017/18
M1MMD

Processus discrets
TD5. Chaines de Markov I

Exercice 1. On lance un dé de manière répétitive. Parmi les processus suivants, lesquels sont des chaines de Markov ? Le cas échéant, donner leur matrice de transition.

1. X_n : le plus grand résultat obtenu après n lancers.
2. N_n : le nombre de 6 obtenus au bout de n lancers.
3. C_n : nombre de lancers, à l'instant n, depuis le dernier 6.
4. $B_n = \sum_{k=0}^{n} N_k$.

Exercice 2. On considère une chaine de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ homogène de matrice de transition P. Déterminer si les processus suivants sont des chaines de Markov et éventuellement préciser leur matrice de transition :

1. $(X_{n+k})_{n\geq 0}$, où k est un entier fixé ;
2. $(X_{2n})_{n\geq 0}$.

Exercice 3 (Modèle de Wright-Fischer)**.** Ce modèle décrit l'évolution d'un ensemble de N chromosomes. On suppose qu'il y a deux types de chromosomes, A et B, et on note X_n le nombre de chromosomes de type A présents à la génération n. Le modèle évolue de la façon suivante : chaque chromosome de la génération $n+1$ choisit au hasard et uniformément un chromosome parent dans la génération n, ceci indépendamment des autres chromosomes. Le chromosome fils a alors le même type que son chromosome parent.

1. Montrer que (X_n) est une chaine de Markov et déterminer sa matrice de transition.
2. (X_n) est-elle irréductible ?

Exercice 4. Soit (S_n) la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire la chaine de Markov ayant pour matrice de transition P donnée par $P(x, x+1) = P(x, x-1) = 1/2$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que $(|S_n|)$ est une chaine de Markov et déterminer sa matrice de transition.
2. On pose $M_n = \max\{S_k \colon k \leq n\}$, montrer que $(M_n - S_n)$ est une chaine de Markov. Déterminer sa matrice de transition.