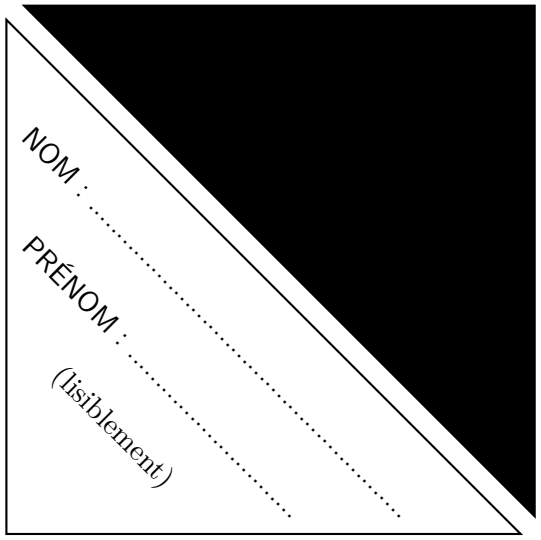
Dauphine | PSL
UNIVERSITÉ PARIS

MIDO - L3 Math. Appliquées
2019–2020

Statistical modelling

Examen du 06 janvier 2020 (durée 2h00)



Toutes les réponses sont à fournir sur la copie d'énoncé. L'espace blanc alloué à chaque question est amplement suffisant pour apporter une réponse correcte. La fin de la copie peut être utilisée pour un complément éventuel.

Important : Suivant les réglements en vigueur,

1. **les enseignants présents lors de l'épreuve ne peuvent communiquer que sur les fautes d'énoncé potentielles. Toute autre question durant la composition ne sera pas acceptée.**
2. **les étudiants sont tenus de se lever au moment de l'annonce de fin de la composition. En cas de refus, le responsable de l'UE sera fondé à ne pas prendre en compte la copie incriminée.**
3. **l'identification des copies et intercalaires doit avoir été faite au moment de la remise de chaque copie par les enseignants et surveillants. Il ne sera pas accordé de délai pour cette raison en fin d'épreuve.**

On rappelle que
— la loi $\mathcal{B}eta(\alpha,\beta)$ a pour densité $f_{a,b}(x) = x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbb{I}_{x\in(0,1)}\Gamma(a+b)\big/\Gamma(a)\Gamma(b)$
— la loi Exponentielle $\mathcal{E}xp(\lambda)$ a pour densité $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{I}_{x>0}$
— la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ a pour densité $f_{\mu,\sigma^2}(x) = e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\big/\sqrt{2\pi}\sigma$
— la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ a pour densité $f_\lambda(x) = \lambda^x\, e^{-\lambda}/x!\,\mathbb{I}_{\mathbb{N}}(x)$

Exercice 1 (7 pts)
Dans cet exercice il vous est demandé de donner la ou les bonnes réponses, seules les réponses justifiées seront validées. Il n'y a pas de points négatifs.

1 Etant donné $X_1,\dots,X_n$ est un échantillon iid de loi $\mathcal{B}eta(1,\lambda)$, l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ associé à l'échantillon $(x_1,\dots,x_n)$ est donné par
(a) $\hat\lambda = -\mathbf{n}/\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}\log\{\mathbf{1}-\mathbf{x_i}\}$ (b) $\hat\lambda = -1/n\sum_{i=1}^n\log\{1-x_i\}$ (c) $\hat\lambda = 1/\{1-\bar x\}$ (d) $\hat\lambda = -1/n\log\left\{\prod_{i=1}^n(1-x_i)\right\}$.

Comme la vraisemblance vaut

$$L(\beta|x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^n \beta(1-x_i)^{\beta-1}$$

$\hat\beta(x_1,\dots,x_n)$ est solution de

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\beta\sum_{i=1}^n\log(1-x_i) + n\log\beta = 0$$

par passage au logarithme, donc

$$\hat\beta(x_1,\dots,x_n) = -n/\sum_{i=1}^n\log\{1-x_i\}$$

qui est la solution (a).

PARTIE
À
RABATTRE

2 Etant donné un vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$ tel que $X_i \overset{\text{ind}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma_i^2)$, où μ est inconnu et les σ_i sont supposés connus, de réalisation $(x_1, \ldots, x_n)$, l'estimateur du maximum de vraisemblance de μ est donné par
(a) $\hat{\mu} = (\sigma_1^2 x_1 + \ldots + \sigma_n^2 x_n)/(\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2)$ (b) $\hat{\mu} = (x_1 + \ldots + x_n)/n$ (c) $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 (x_i - \hat{\mu})^{-1} = 0$ (d) $\hat{\mu} = (\sigma_\mathbf{1}^{-\mathbf{2}}\mathbf{x_1} + \ldots + \sigma_\mathbf{n}^{-\mathbf{2}}\mathbf{x_n})/(\sigma_\mathbf{1}^{-\mathbf{2}} + \ldots + \sigma_\mathbf{n}^{-\mathbf{2}})$

Comme la vraisemblance vaut

$$L(\mu | x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n \sigma_i^{-1} \exp\{-(x_i - \mu)^2 \sigma_i^2\}$$

$\hat{\mu}(x_1, \ldots, x_n)$ est solution de

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{i=1}^n \sigma_i^{-2} (x_i - \mu) = 0$$

par passage au logarithme, donc

$$\hat{\mu}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^{-2} x_i \Big/ \sum_{i=1}^n \sigma_i^{-2}$$

qui est la solution (d).

3. Si $X_1, \ldots, X_n$ et $Y_1, \ldots, Y_n$ sont des échantillons iid aléatoires de lois $\mathcal{E}xp(\lambda)$ et $\mathcal{E}xp(1/\lambda)$, respectivement, l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ associé à l'ensemble des observations $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ est donné par
(a) $\hat{\lambda} = (\bar{x}_n - \bar{y}_n)/2$ (b) $\hat{\lambda} = \sqrt{\bar{x}_n \bar{y}_n}$ (c) $\hat{\lambda} = \bar{y}_n / \bar{x}_n$ (d) $\hat{\lambda} = \sqrt{\bar{x}_n / \bar{y}_n}$ (e) $\hat{\lambda} = \sqrt{\bar{\mathbf{y}}_\mathbf{n} / \bar{\mathbf{x}}_\mathbf{n}}$

Comme la vraisemblance vaut

$$L(\lambda | x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \prod_{i=1}^n \lambda \exp\{-\lambda x_i\} \lambda^{-1} \exp\{-\lambda^{-1} y_i\}$$

$\hat{\lambda}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ est solution de

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \lambda \sum_{i=1}^n x_i + \lambda^{-1} \sum_{i=1}^n y_i = 0$$

par passage au logarithme, donc

$$\hat{\lambda}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)^2 = \sum_{i=1}^n y_i \Big/ \sum_{i=1}^n x_i$$

qui est la solution (e).

4. Si (X_1, X_2) est un échantillon iid de deux variables Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$, une statistique exhaustive est
(a) $X_1 - X_2$ (b) $\max(X_1, X_2)$ (c) $\mathbf{X_1 + 2X_2}$ (d) $\mathbb{I}_0(X_1 - X_2)$

La statistique exhaustive standard du modèle exponential de Bernoulli est $S(X_1, X_2) = X_1 + X_2$, mais, tandis qu'il n'est pas possible de construire $S(X_1, X_2)$ à partir de $D(X_1, X_2) = X_1 - X_2$ (quand $D(X_1, X_2) = 0$), ni de $M(X_1, X_2) = \max(X_1, X_2)$ (quand $M(X_1, X_2) = 1$), ni de $Z(X_1, X_2) = \mathbb{I}_0(X_1 - X_2)$ (quand $Z(X_1, X_2) = 0$), $R(X_1, X_2) = X_1 + 2X_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ est en bijection avec $(X_1, X_2) \in \{0, 1\}^2$, donc permet de calculer $S(X_1, X_2)$.

5. Étant donné $X_1, \ldots, X_n$, échantillon iid de loi $\mathcal{E}xp(\lambda)$, on construit $(Z_1, \ldots, Z_n) = (\mathbb{I}(X_1 \geq \delta), \ldots, \mathbb{I}(X_n \geq \delta))$, avec δ connu. Si la réalisation $(z_1, \ldots, z_n)$ vaut $(1, \ldots, 1)$, l'estimation du maximum de vraisemblance de λ vaut :
(a) $\hat{\lambda} = \delta$ (b) $\hat{\lambda} = 1/\bar{x}$ (c) $\hat{\lambda} = \bar{x}$ (d) $\hat{\lambda} = \mathbf{0}$ (e) $\hat{\lambda} = 1/\delta$ (f) $\hat{\lambda} = 1$.

Comme $\mathbb{P}_\lambda(X_i \geq \delta) = \exp\{-\delta\lambda\}$, les Z_i sont iid de loi Bernoulli de paramètre $p = \exp\{-\delta\lambda\}$. La vraisemblance de l'échantillon $(z_1, \ldots, z_n)$ vaut donc

$$L(p|(z_1, \ldots, z_n)) = \prod_{i=1}^{n} p^{z_i}(1-p)^{1-z_i}$$

soit $L(p|(z_1, \ldots, z_n)) = p^n$ lorsque $(z_1, \ldots, z_n)) = (1, \ldots, 1)$. Le maximum de cette fonction est atteint pour $\hat{p} = 1$, donc pour $\hat{\lambda} = 0$. La solution est donc (d).

6 Si $X_1, \ldots, X_n$ est un échantillon iid de loi $\mathcal{U}(0, \theta)$ and si $Y_1, \ldots, Y_n$ est un échantillon iid de loi $\mathcal{U}(0, \lambda)$, l'estimateur sans biais de variance minimale (UMVUE) de θ/λ est donné par
(a) $\max(X_i)/\max(Y_i)$ (b) $\max(X_i)/\{2\min(Y_i)\}$ (c) $(\mathbf{n^2 - 1})\max(\mathbf{X_i})/\{\mathbf{n^2}\max(\mathbf{Y_i})\}$ (d) $2\min(X_i)/\max(Y_i)$ (e) $(n+1)\max(X_i)/\{(n-1)\max(Y_i)\}$

Comme $\max(X_i)$ est une statistique exhaustive minimale complète pour le premier échantillon et $\max(Y_i)$ est une statistique exhaustive minimale complète pour le second échantillon, il suffit de trouver un estimateur sans biais de λ dépendant de $\max(X_i)$, soit

$$\hat{\theta} = \frac{n+1}{n}\max(X_i)$$

et un estimateur sans biais de θ dépendant de $\max(Y_i) = Y_{(n)}$. Comme

$$\mathbb{E}[Y_{(n)}^{-1} = \int_0^\lambda y^{-1}\lambda^{-n}ny^{n-1}\mathrm{d}y = \frac{\lambda^{-n}n}{\lambda^{-n+1}(n-1)} = \frac{n}{n-1}\lambda^{-1}$$

$(n-1)/\{nY_{(n)}\}$ est un estimateur sans biais de λ. La solution est donc (c).

7 Pour construire une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle $\mathcal{E}xp(\lambda)$, avec $\lambda > 0$, à partir d'une variable uniforme $\mathcal{U}(0,1)$, U, on peut utiliser la transformation
(a) $X = \lambda\log(U)$ (b) $X = -\log[(1-U)]^\lambda$ (c) $\mathbf{X} = -\log(\mathbf{1} - \mathbf{U})/\lambda$ (d) $X = \log[\lambda(1-U)]$ (e) $X = -\log(U/\lambda)$ (f) $X = \exp\{-\log(U)^\lambda\}$.

Comme $F_\lambda(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$ est la fonction de répartition de X,

$$F^{-1}(U) = \log\{1-U)/\lambda$$

est aussi distribuée suivant la loi F puisque

$$\mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F(x)) = F(x))$$

ce qui donne la réponse (c). Cette méthode de simulation est appelée méthode de la fonction de répartition inverse.

Exercice 2 (8 points)
Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon i.i.d. de variables aléatoires de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.
Rappels :

- Si X et Y sont indépendantes de loi $\mathcal{P}(a)$ et $\mathcal{P}(b)$ respectivement, alors $X + Y \sim \mathcal{P}(a + b)$.
- Soit $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ pour $x \in \mathbb{R}$ et avec $a_k \in \mathbb{R}$. Si g est nulle sur un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, alors $a_k = 0 \; \forall k \in \mathbb{N}$.

1. (1 pt) Montrer que $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$ est une statistique exhaustive (="sufficient") et complète pour le paramètre λ.

On peut écrire

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n \mid \lambda) &= \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^n x_i!} \\ &= g(T(x_1, \ldots, x_n) \mid \lambda) \times h(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

avec $g(T(x_1, \ldots, x_n) \mid \lambda) = \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n\lambda}$ et $h(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!}$ donc par le théorème de factorisation, T est exhaustive.
$T(X)$ est une somme de variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre λ et donc suit une loi $\mathcal{P}(n\lambda)$. On a alors, pour toute fonction f, si $\mathbb{E}_\lambda[f(T(X))] = 0$ pour tout $\lambda > 0$,

$$e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\lambda)^k}{k!} f(k) = 0, \; \forall \lambda > 0,$$

i.e.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\lambda)^k}{k!} f(k) = 0, \; \forall \lambda > 0.$$

Par le rappel de l'énoncé, on en déduit $f(k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et donc T est complète.

2. (1 pt) Montrer que l'estimateur $\hat{\lambda} = (1/n) \sum_{i=1}^n X_i$ est sans biais et qu'il s'agit de l'estimateur de variance uniformément minimale (MVUE), sans biais de λ.

On a

$$\mathbb{E}[\hat{\lambda}] = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]}{n} = \lambda,$$

i.e. $\hat{\lambda} = T(X)/n$ est sans biais. Par le théorème de Lehmann-Scheffé, c'est le meilleur estimateur sans biais de λ car T est exhaustive et complète.

On s'intéresse maintenant à l'estimation de $\theta = e^{-\lambda}$.

3. (0,5 pt) Montrer que $e^{-\hat{\lambda}}$ est un estimateur biaisé de θ.

On peut écrire l'espérance de cet estimateur

$$\mathbb{E}[e^{-\hat{\lambda}}] = \mathbb{E}[e^{-(\sum_{i=1}^n X_i)/n}] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{-X_i/n}] = (\mathbb{E}[e^{-X_1/n}])^n$$

avec

$$\mathbb{E}[e^{-X_1/n}] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-k/n} e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(e^{-1/n}\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{e^{-1/n}\lambda},$$

d'où

$$\mathbb{E}[e^{-\hat{\lambda}}] = (e^{-\lambda} e^{e^{-1/n}\lambda})^n = e^{-\lambda n(e^{-1/n}-1)} \neq e^{-\lambda}$$

i.e. l'estimateur est biaisé.

4. (0,5 pts) On a

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{X_1=0}] = \mathbb{P}(X_1 = 0) = e^{-\lambda},$$

donc $\mathbf{1}_{X_1=0}$ est bien un estimateur sans biais de $e^{-\lambda}$.

4. (0,5 pt) On considère alors l'estimateur $\hat{\theta} = \mathbf{1}_{X_1=0}$. Montrer que c'est un estimateur sans biais de θ.

On a

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{X_1=0}] = \mathbb{P}(X_1 = 0) = e^{-\lambda},$$

donc $\mathbf{1}_{X_1=0}$ est bien un estimateur sans biais de $e^{-\lambda}$.

5. (2 pts) Montrer que pour tous l et k dans $\mathbb{N}$, $P(X_1 = k \mid T(X) = l) = \binom{l}{k}(1-1/n)^{l-k}(1/n)^k$. Quelle est la loi de X_1 sachant $T(X)$?

$$\begin{aligned}
P(X_1 = k \mid T(X) = l) &= \frac{P(X_1 = k, T(X) = l)}{P(T(X) = l)} = \frac{P(X_1 = k, \sum_{i=2}^n X_i = l - k)}{P(T(X) = l)} \\
&= \frac{P(X_1 = k) P(\sum_{i=2}^n X_i = l - k)}{P(T(X) = l)} \\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \frac{e^{-\lambda(n-1)}(\lambda(n-1))^{l-k}}{(l-k)!} \frac{l!}{e^{-n\lambda}(n\lambda)^l} \\
&= \binom{l}{k}(1-1/n)^{l-k}(1/n)^k,
\end{aligned}$$

donc la loi de X_1 sachant $T(X)$ est une binomiale de paramètre $(l, 1-1/n)$.

6. (1 pt) Calculer la version améliorée de $\hat{\theta}$ grâce au théorème de Rao-Blackwell. Que peut-on dire sur cet estimateur ?

T est également exhaustive et complète pour $\theta = e^{-\lambda}$. En effet, on peut écrire

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n \mid \theta) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{\ln(\theta)^{x_i}\theta}{x_i!} = \frac{\ln(\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i}\theta^n}{\prod_{i=1}^n x_i!} \\ &= g(T(x_1, \dots, x_n) \mid \theta) \times h(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

avec $g(T(x_1, \dots, x_n) \mid \theta) = \ln(\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i}\theta^n$ et $h(x_1, \dots, x_n) = 1/(\prod_{i=1}^n x_i!)$, et donc T est exhaustive. Remarquons qu'on a également

$$\mathbb{E}_\theta(f(T)) = 0 \ \forall \theta \in]0,1[\Leftrightarrow \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(n\ln(\theta))^t}{t!} f(t) = 0, \forall \theta \in]0,1[$$

donc on déduit comme précédemment que T est complète.
L'estimateur amélioré par Rao-Blackwell est l'espérance conditionnelle de $\hat{\theta}$ sachant $T(X)$, i.e.

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{X_1=0} \mid T(X)] = \mathbb{P}(X_1 = 0 \mid T(X)) = (1 - 1/n)^{T(X)}$$

C'est le meilleur estimateur sans biais d'après le théorème de Lehmann-Scheffé car T est exhaustive et également complète et $\hat{\theta}$ est sans biais.

On propose maintenant un changement de modèle statistique,

7. (1 pt) On observe $(Y_1, \dots, Y_n)$ avec $Y_i = \mathbf{1}_{X_i=0}$. Calculer la loi de Y_i, en déduire une statistique exhaustive et complète pour le paramètre $\mathrm{e}^{-\lambda}$ dans ce modèle.

$Y_i = \mathbf{1}_{X_i=0}$ suit une loi $B(\mathrm{e}^{-\lambda})$, la vraisemblance associée à $(Y_1, \dots, Y_n)$ s'écrit alors $\mathrm{e}^{-\lambda\sum_{i=1}^n Y_i}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda})^{n-\sum_{i=1}^n Y_i}$. Une statistique exhaustive pour ce modèle statistique est alors $Z = \sum_{i=1}^n Y_i$.

8. (1 pt) Donner un estimateur sans biais de $\mathrm{e}^{-\lambda}$. En quoi est-il le meilleur estimateur possible ?

On propose l'estimateur du maximum de vraisemblance du précédent modèle $\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$. La statistique $Z = \sum_{i=1}^n Y_i$ est complète. En effet, si on a $E(f(Z)) = \sum_k \binom{n}{k} f(k)\mathrm{e}^{-\lambda k}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda})^{n-k} = 0 \ \forall \mathrm{e}^{-\lambda}$, alors on a une infinité de racines au polynôme $\sum_k \binom{n}{k} f(k) X^k (1-X)^{n-k}$, ce qui implique qu'il est nul. On applique ensuite le théorème de Lehmann-Scheffé au précédent estimateur, et on obtient le meilleur estimateur non biaisé $\mathbb{E}[(1/n)\sum_{i=1}^n Y_i \mid \sum_{i=1}^n Y_i] = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$.

Exercise 3 (7 points, les questions peuvent être résolues indépendamment) Pour représenter les cours de divers instruments financiers comme les actions ou les taux d'intérêt, on décide d'utiliser le modèle statistique $\mathcal{P}$ associé à la loi log-normale, notée $\log-\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, dont la densité est donnée sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(y \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(\ln(y) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad \mu \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \sigma^2 \in \mathbb{R}_+.$$

1. (1 pt) Justifier que la loi log-normale appartient à une famille exponentielle. Cette famille est-elle minimale ?

2. (1 pt) Dans R, la loi log-normale est désignée par `lnorm` et a pour paramètres `meanlog` et `sdlog`. Donner les codes R qui, pour `meanlog` $= 1$ et `sdlog` $= 0.5$, permettent de simuler un échantillon `y` de 100 réalisations de la loi log-normale, d'évaluer la densité f au point 0.7, de calculer le quantile d'ordre 90% de la loi log-normale et le quantile empirique d'ordre 90% de l'échantillon `y`.

On observe différents cours $y_1, \ldots, y_n$ supposés être des réalisations *i.i.d* du modèle $\mathcal{P}$. On souhaite estimer les paramètres μ et σ^2 à l'aide des estimateurs suivants

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(Y_k) \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} [\ln(Y_k) - \hat{\mu}_n]^2 .$$

3. (0.5 pt) Montrer que si Y suit la loi $\log-\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $X = \ln(Y)$ suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

4. (2.5 pt) En déduire que les estimateurs $\hat{\mu}_n$ et $\hat{\sigma}_n^2$ convergent respectivement vers μ et σ^2 et que $\hat{\sigma}_n^2$ est biaisé, c'est-à-dire que $\mathbb{E}[\hat{\sigma}_n^2] \neq \sigma^2$.

5. (1 pt) La médiane de la loi $\log -\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est $m = \exp(\mu)$. Donner un intervalle de confiance pour m au niveau de confiance asymptotique $1 - \alpha$ en fonction de $\hat{\mu}_n$.

Dans la suite, on considère que l'on a chargé dans R un vecteur d'observations y correspondant aux différents cours financiers que l'on étudie.

6. (1 pt) Écrire le code R permettant d'évaluer l'erreur quadratique moyenne $\mathbb{E}\left[(\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2)^2\right]$ à l'aide d'une procédure bootstrap non paramétrique.