

Examen Partiel – Octobre 2019

Durée 2h00 – Sans documents

Important. Suivant les règlements en vigueur,

1. les enseignants présents lors de l'épreuve ne peuvent communiquer que sur les fautes d'énoncé potentielles. Toute autre question durant la composition ne sera pas acceptée.
2. les étudiants sont tenus de se lever au moment de l'annonce de fin de la composition. En cas de refus, le responsable de l'UE sera fondé à ne pas prendre en compte la copie incriminée.
3. l'identification des copies et intercalaires doit se faire au moment de la remise de chaque copie par les enseignants et surveillants. Il ne sera pas accordé de délai pour cette raison en fin d'épreuve.

Exercice 1 (7 pts – **Les questions peuvent être résolues indépendamment**). Pour représenter les cours de divers instruments financiers comme les actions ou les taux d'intérêt, on décide d'utiliser le modèle statistique \mathcal{P} associé à la loi log-normale, notée $\log - \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, dont la densité est donnée par

$$f(y \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(\ln(y) - \mu)^2}{2\sigma^2} \right], \quad \mu \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \sigma^2 \in \mathbb{R}_+.$$

1. (1 pt) Justifier que la loi log-normale appartient à une famille exponentielle. Cette famille est-elle minimale ?
2. (1 pt) Dans R, la loi log-normale est désignée par `lnorm` et a pour paramètre `meanlog` et `sdlog`. Donner les codes R qui, pour `meanlog = 1` et `sdlog = 0.5`, permettent de simuler un échantillon y de 100 réalisations de la loi log-normale, d'évaluer la densité f au point 0.7, de calculer le quantile d'ordre 90% de la loi log-normale et le quantile empirique d'ordre 90% de l'échantillon y .

On observe différents cours y_1, \dots, y_n supposés être des réalisations *i.i.d* du modèle \mathcal{P} . On souhaite estimer les paramètres μ et σ^2 à l'aide des estimateurs suivants

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(Y_k). \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [\ln(Y_k) - \hat{\mu}_n]^2.$$

3. (a) (0.5 pt) Montrer que si Y suit la loi $\log - \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $X = \ln(Y)$ suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
(b) (1.5 pts) En déduire que les estimateurs $\hat{\mu}_n$ et $\hat{\sigma}_n^2$ convergent respectivement vers μ et σ^2 et que $\hat{\sigma}_n^2$ est biaisé, c'est-à-dire $\mathbb{E}[\hat{\sigma}_n^2] \neq \sigma^2$.
4. (1 pts) La médiane de la loi $\log - \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est $m = \exp(\mu)$. Donner un intervalle de confiance pour m au niveau de confiance asymptotique $1 - \alpha$ en fonction de $\hat{\mu}_n$.

Dans la suite, on considère que l'on a chargé dans R un vecteur d'observations y correspondant aux différents cours financiers que l'on étudie.

5. (1 pt) Écrire le code R donnant une approximation bootstrap paramétrique d'un intervalle de confiance pour σ^2 au niveau 95%.
6. (1 pt) Écrire le code R permettant d'évaluer l'erreur quadratique moyenne $\mathbb{E}[(\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2)^2]$ à l'aide d'une procédure bootstrap non paramétrique.

Exercice 2 (5 pts). On définit la loi de Weibull par la densité suivante :

$$f(x | \lambda) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right] \mathbb{I}_{x>0},$$

où $k > 1$ est connu et λ est inconnu. On note x_1, \dots, x_n un échantillon *i.i.d.* de cette loi.

1. (1.5 pts) Montrer que cette loi appartient à une famille exponentielle et en donner la forme canonique, avec comme statistique $T(x) = x^k$. Cette famille est-elle minimale? régulière?
2. (2 pts) Calculer la fonction génératrice des moments associée à la statistique naturelle. En déduire $\mathbb{E}[X^k]$, $\mathbb{E}[X^{2k}]$ et $\text{Var}[X^k]$ pour X suivant une loi de Weibull.
3. (0.5 pt) Montrer que $\hat{\lambda}_n^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k$ est un estimateur non biaisé de λ^k , c'est-à-dire $\mathbb{E}[\hat{\lambda}_n^k] = \lambda^k$. En déduire que $\hat{\lambda}_n = \sqrt[k]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k}$ est un estimateur biaisé de λ .
4. (1pt) Trouver une suite (a_n) telle que

$$\frac{\sqrt{n}}{a_n}(\hat{\lambda}_n - \lambda) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

En déduire un intervalle de confiance asymptotique de niveau α pour λ .

5. (1 pt) Quelle est la densité de X^k ?

Exercice 3 (3 pts). On considère un portefeuille d'assurance où le nombre de sinistres X_i de l'assuré i dans une année suit une loi de Poisson de paramètre θ_i . Les θ_i sont distincts, inconnus et aléatoires de loi π . Autrement dit, on connaît uniquement la loi de X_i conditionnellement à θ_i

$$\mathbb{P}[X_i = n | \theta_i] = \frac{e^{-\theta_i} \theta_i^n}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On note X le nombre de sinistres dans une année d'un assuré pris au hasard. Dans la suite, on cherche à étudier la loi de X marginale, c'est-à-dire la loi du nombre de sinistres dans une année sans connaître la valeur de θ .

Les réponses aux questions 2. et 3. ne dépendent pas de la question 1.

1. (1 pts) On suppose que π est la loi Gamma de paramètre (r, λ) de densité par rapport à la mesure de Lebesgue

$$f_{r,\lambda}(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \lambda^r t^{r-1} \exp(-\lambda t) \mathbb{I}_{t \geq 0},$$

où $r > 1$ et $\lambda > 0$. En admettant que $\mathbb{P}[X = n] = \mathbb{E}_\pi[\mathbb{P}[X = n | \theta]]$, montrer que la loi de X marginale suit une loi binomiale négative de paramètre (a, p) (avec $a > 0$ et $0 < p < 1$) que l'on précisera, c'est-à-dire qu'elle a pour fonction de masse,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}[X = n] = \frac{\Gamma(a+n)}{n! \Gamma(a)} p^a (1-p)^n.$$

2. (1 pt) Montrer que si le paramètre a est fixé, la loi binomiale négative de paramètre (a, p) appartient à une famille exponentielle. Est-elle sous forme canonique ?
3. (1 pt) En utilisant la forme canonique de cette famille exponentielle, déduire l'espérance et la variance de X .

Exercice 4 (6 pts – Les questions peuvent être résolues indépendamment). Soit f une densité de probabilité sur \mathbb{R} . On définit l'ensemble

$$\mathfrak{A} = \left\{ (u; v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}; 0 \leq u^2 \leq f(v/u) \right\},$$

1. (2 pts)

- (a) Définissant $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$ comme la loi uniforme sur l'ensemble \mathfrak{A} , montrez que, si $(U, V) \sim \mathcal{U}(\mathfrak{A})$, la densité de la transformée $(W, X) = (U^2, V/U)$ est

$$\tilde{f}(w, x) \propto \mathbb{I}_A(w^{1/2}, w^{1/2}x) \times w^{1/2} \times \frac{1}{2w^{1/2}} \propto \mathbb{I}_{0 \leq w \leq f(x)}$$

où \propto dénote le signe de proportionalité, $f \propto g$ signifiant qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $f(x) = c g(x)$ pour tout x dans \mathbb{R} . En déduire que la loi de $X = V/U$ a pour densité f .

- (b) Montrer que le résultat s'étend au cas où f est seulement proportionnelle à une densité de probabilité.
2. (1 pt) Si l'ensemble \mathfrak{A} est borné, proposer une méthode de simulation de f fondée sur des simulations uniformes sur un certain carré de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.
3. (1 pt) Montrer que l'ensemble \mathfrak{A} est borné par la courbe

$$u(x) = \sqrt{f(x)} \quad \text{et} \quad v(x) = x\sqrt{f(x)}, \quad \text{avec} \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. (2 pts)

- (a) Déterminer cette courbe dans le cas où f est la densité de la loi Normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et montrer que l'ensemble \mathfrak{A} associé est inclus dans un carré dont on déterminera les bornes

$$0 \leq \sqrt{f(x)} \leq b \quad c \leq x\sqrt{f(x)} \leq d$$

- (b) Proposer un code R mettant en œuvre cette méthode pour la simulation de la loi Normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
- (c) Sachant que le rapport de la surface de \mathfrak{A} à celle du carré l'entourant vaut 0.73 (admis), discuter de l'efficacité de cette méthode.