Université Paris Dauphine
Département MIDO
Licence 3 – Statistique mathématique 2021–2022

TD n°1 – Outils de probabilités.

stoehr@ceremade.dauphine.fr

Exercice 1. Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables alétoires *i.i.d.* suivant la loi

$$\mathbb{P}_\theta(\mathrm{d}x) = \frac{1}{1+\theta}\delta_0(\mathrm{d}x) + \frac{\theta}{1+\theta}\delta_1(\mathrm{d}x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $V_n = X_n X_{n+1}$ et $\overline{V}_n = \sum_{k=1}^n V_k \big/ n$.

1. Calculer les moments d'ordre 1 et d'ordre 2 de X_1.
2. Déterminer la loi de V_1.
3. Pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $1 \leq n < m$, calculer $\mathbb{E}[V_1]$ et $\mathbb{E}[V_n V_m]$.
4. Montrer que $\overline{V}_n$ converge en probabilité vers $\theta^2 \big/ (1+\theta)^2$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2. Soient X une variable aléatoire réelle et Y une variable aléatoire, indépendante de X, de loi de Rademacher : $\mathbb{P}[Y=1] = \mathbb{P}[Y=-1] = 0.5$.

1. **(a)** Montrer que $V = XY$ est une variable aléatoire symétrique.

   (b) Exprimer la fonction génératrice des moments de V en fonction de la fonction génératrice des moments de X.
2. Montrer que si X est distribuée suivant la loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$ alors V est distribuée suivant la loi de Laplace $\mathscr{L}(0, \lambda^{-1})$.

Exercice 3. On définit pour $c \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{c}{\sqrt{x(1-x)}} \mathbb{1}_{[0,1]}(x).$$

1. Pour quelle valeur de c, f définit-elle une densité ?

On considère maintenant que c est fixé à cette valeur et X une variable aléatoire réelle de densité f.

2. Trouver des réels a et b tels que $aX + b$ a même loi que X.
3. Calculer les moments d'ordre 1 et 2 de X.
4. Montrer que les quartiles de la loi associée à f sont donnés par

$$q_{1/4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad q_{1/2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad q_{3/4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire discrète de support $\Omega = \{x_k \in \mathbb{R},\, k \in \mathbb{N}\}$ telle que pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}[X = x_k] = p_k$.

1. Déterminer le quantile d'ordre $\beta \in]0,1[$ de la loi associée à X
2. Vérifier que si X sui une loi binomiale de paramètre $(10, 0.5)$, alors $m = 5$ est la médiane de cette loi.

Exercice 5 ***(À connaître – Théorème de Cochran)***. Soient Z est un vecteur gaussien standard, *i.e.*, $Z \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_n, I_n)$, F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ tel que $\dim(F) = p$ et P la matrice de projection orthogonale sur F. On commence par démontrer la version simplifiée du théorème de Cochran.

1. Montrer que PZ et $(I_n - P)Z$ sont des variables aléatoires indépendantes.
2. Montrer que $\|PZ\|_2^2$ suit loi du χ^2 centrée à p degrés de liberté, c'est à dire $\|PZ\|_2^2 = \sum_{k=1}^p X_k^2$, où $X_1, \ldots, X_p$ sont des variables aléatoires *i.i.d.* suivant la loi normale centrée réduite.

Application. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles *i.i.d.* de loi $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$. On définit les variables aléatoires suivantes :

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad S_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2.$$

3. Montrer que $\overline{X}_n$ et S_{n-1}^2 sont indépendantes et

$$\overline{X}_n \sim \mathcal{N}\left(\theta, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{et} \quad (n-1)\frac{S_{n-1}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$