TD n°2 – Estimation ponctuelle

stoehr@ceremade.dauphine.fr

Exercice 1. Soit $(X_1, ..., X_n)$ un n-échantillon de loi uniforme sur $[0, \theta]$, où $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ est inconnu.

1. Calculer $E_\theta(X_1)$ et en déduire un estimateur $\widehat{\theta}_n$ de θ par la méthode des moments.

2. Calculer le biais et le risque quadratique de l'estimateur $\widehat{\theta}_n$.

3. Étudier la convergence en loi de $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2. Soient $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire réelle de densité définie par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = p\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + (1-p)\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right).$$

1. Déterminer un estimateur $\widehat{p}_n$ de p par la méthode des moments.

2. Peut-on trouver une suite a_n indépendante de p telle que $a_n(\widehat{p}_n - p) \xrightarrow[n\to+\infty]{d} \mathcal{N}(0,1)$?

Exercice 3. On observe un n-échantillon $X = (X_1, \ldots, X_n)$ de loi uniforme sur $[\theta - 1/2, \theta + 1/2]$ où $\theta \in \mathbb{R}$ est un paramètre inconnu.

1. En utilisant la méthode des moments, proposer un estimateur consistant de θ.

2. Écrire la vraisemblance du modèle.

3. L'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est-il bien défini ?

Exercice 4. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon distribué suivant la loi de densité donnée, pour $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x \mid \theta, \gamma) = \frac{1}{\theta}\exp\left[-\frac{1}{\theta}(x-\gamma)\right]\mathbb{1}_{x>\gamma}, \quad \theta \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{et} \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer une estimation des paramètres θ et γ par la méthode des moments

2. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance des paramètres θ et γ.

Exercice 5. Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de loi P_θ, $\theta \in \mathbb{R}_+^*$, de densité par rapport à la mesure de Lebesgue donnée par

$$f_\theta(x) = \frac{4}{\theta^4}x^3\mathbb{1}_{[0,\theta]}(x).$$

1. Déterminer un estimateur U_n de θ fonction de la moyenne empirique $\overline{X}_n$, sans biais et consistant.

2. Déterminer la loi limite de $\sqrt{n}(U_n - \theta)$.

3. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance V_n de θ.

4. Déduire de V_n un estimateur T_n de θ sans biais et le comparer à T_n.