

TD n°2 – Estimation ponctuelle

stoehr@ceremade.dauphine.fr

Exercice 1. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon de loi uniforme sur $[0, \theta]$, où $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ est inconnu.

1. Calculer $\mathbb{E}_\theta[X_1]$ et en déduire un estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ par la méthode des moments.
2. Calculer le biais et le risque quadratique de l'estimateur $\hat{\theta}_n$.
3. Étudier la convergence en loi de $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2. Soient $p \in]0, 1[$ et X une variable aléatoire réelle de densité définie par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = p \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + (1-p) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right).$$

1. Déterminer un estimateur $\hat{p}_n$ de p par la méthode des moments.
2. Peut-on trouver une suite a_n indépendante de p telle que $a_n(\hat{p}_n - p) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{d} \mathcal{N}(0, 1)$?

Exercice 3. On observe un n -échantillon $X = (X_1, \dots, X_n)$ de loi uniforme sur $[\theta - 1/2, \theta + 1/2]$ où $\theta \in \mathbb{R}$ est un paramètre inconnu.

1. En utilisant la méthode des moments, proposer un estimateur consistant de θ .
2. Écrire la vraisemblance du modèle.
3. L'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est-il bien défini ?

Exercice 4. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon distribué suivant la loi de densité donnée, pour $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x | \theta, \gamma) = \frac{1}{\theta} \exp\left[-\frac{1}{\theta}(x - \gamma)\right] \mathbb{1}_{x > \gamma}, \quad \theta \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{et} \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer une estimation des paramètres θ et γ par la méthode des moments
2. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance des paramètres θ et γ .

Exercice 5. Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon de loi $\mathbb{P}_\theta$, $\theta \in \mathbb{R}_+^*$, de densité par rapport à la mesure de Lebesgue donnée par

$$f_\theta(x) = \frac{4}{\theta^4} x^3 \mathbb{1}_{[0, \theta]}(x).$$

1. Déterminer un estimateur U_n de θ (en fonction de $\bar{X}_n$), sans biais et consistant.
2. Déterminer la loi limite de $\sqrt{n}(U_n - \theta)$.

3. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance V_n de θ .
4. Dédire de V_n un estimateur T_n de θ sans biais et le comparer à T_n .

JULIEN STOEHR