TD n°4 – Tests d'hypothèses

stoehr@ceremade.dauphine.fr

Exercice 1. On observe X_1 de loi $\mathscr{U}([0,1])$ sous H_0 ou $\mathscr{U}([2,3])$ sous H_1. Proposer un test de H_0 contre H_1. Calculer les erreurs de première et seconde espèce, ainsi que la fonction puissance de ce test.

Exercice 2 ***(À connaître – Test gaussien)***. Soit $(X_1,\cdots,X_n)$ un n-échantillon de la loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ avec $\sigma\in\mathbb{R}_+^*$ connu. Pour $\mu_0\in\mathbb{R}$, on considère le problème de test suivant :

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

1. Écrire un test de taille $\alpha\in]0,1[$.

2. Calculer sa fonction puissance.

3. Étudier la convergence de la fonction puissance quand n tend vers l'infini. Cette convergence est-elle uniforme ?

4. Étudier la puissance du test en $\mu=\mu_0+n^{-\gamma}$ quand n tend vers l'infini, en fonction de $\gamma\in\mathbb{R}_+$.

5. Le test proposé est-il sans biais ?

Exercice 3 ***(À connaître – Test gaussien)***. Soit $(X_1,\cdots,X_n)$ un n-échantillon de la loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ avec $\mu\in\mathbb{R}$ et $\sigma\in\mathbb{R}_+^*$ inconnus. Pour $\sigma_0\in\mathbb{R}_+^*$, on considère le problème de test suivant :

$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \quad \text{contre} \quad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2.$$

1. Écrire un test de taille $1-\alpha$, $\alpha\in]0,1[$.

2. Donner la p-valeur du test.

3. Écrire un code R qui permet d'évaluer cette p-valeur.

Exercice 4 ***(À connaître – Modèle linéaire gaussien)***. On se place dans le cadre d'un modèle linéraire gaussien. Soient $\mathbb{X}\in\mathscr{M}_{n,d}(\mathbb{R})$ telle que $\mathbb{X}^T\mathbb{X}>0$ et ξ un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^n$ de loi $\mathcal{N}(\mathbf{0}_n,\sigma^2 I_n)$, $\sigma\in\mathbb{R}_+^*$. On observe

$$Y = \mathbb{X}\beta+\xi, \quad \beta=(\beta_1,\ldots,\beta_d)^T\in\mathbb{R}^d.$$

On note $(\widehat{\beta}_n,\widehat{\sigma}_n^2)=(\widehat{\beta}_{1,n},\ldots,\widehat{\beta}_{d,n},\widehat{\sigma}_n^2)$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de (β,σ^2).

On souhaite tester, pour $a\in\mathbb{R}$ et $j\in[\![1,d]\!]$, les hypothèses

$$H_0 : \beta_j = a \quad \text{contre} \quad H_1 : \beta_j \neq a.$$

1. Montrer que si σ^2 est connu, alors le test de zone de rejet définie, pour $\alpha \in]0,1[$, par

$$\mathscr{R}_\alpha = \left\{ Y : \left|\widehat{\beta}_{j,n} - a\right| > q_{1-\alpha/2}\,\sigma\sqrt{(\mathbb{X}^T\mathbb{X})^{-1}_{jj}} \right\},$$

avec $q_{1-\alpha/2}$ le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, est un test de taille α permettant de tester H_0 contre H_1.

2. Montrer que si σ^2 est inconnu, alors le test de zone de rejet définie, pour $\alpha \in]0,1[$, par

$$\mathscr{R}_\alpha = \left\{ Y : \left|\widehat{\beta}_{j,n} - a\right| > q_{1-\alpha/2,n-d}\sqrt{\frac{n}{n-d}\widehat{\sigma}_n^2(\mathbb{X}^T\mathbb{X})^{-1}_{jj}} \right\}$$

avec $q_{1-\alpha/2,n-d}$ le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi de Student $\mathscr{T}(n-d)$, est un test de taille α permettant de tester H_0 contre H_1.

On souhaite tester, pour $b \in \mathbb{R}^d$, les hypothèses

$$H_0 : \beta = b \quad \text{contre} \quad H_1 : \beta \neq b.$$

3. Montrer que si σ^2 est connu, alors le test de zone de rejet définie, pour $\alpha \in]0,1[$, par

$$\mathscr{R}_\alpha = \left\{ Y : \left\|\mathbb{X}\left(\widehat{\beta}_n - b\right)\right\|^2 > \sigma^2 q_{1-\alpha,d} \right\},$$

avec $q_{1-\alpha,d}$ le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi du $\chi^2(d)$, est un test de taille α permettant de tester H_0 contre H_1.

4. Montrer que si σ^2 est inconnu, alors le test de zone de rejet définie, pour $\alpha \in]0,1[$, par

$$\mathscr{R}_\alpha = \left\{ Y : \left\|\mathbb{X}\left(\widehat{\beta}_n - b\right)\right\|^2 > \frac{d}{n-d} q_{1-\alpha,d,n-d} \left\|Y - \mathbb{X}\widehat{\beta}_n\right\|^2 \right\}$$

avec $q_{1-\alpha,d,n-d}$ le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi de Fisher $\mathscr{F}(d,n-d)$, est un test de taille α permettant de tester H_0 contre H_1.