

TD n°4 – Tests d’hypothèses

stoehr@ceremade.dauphine.fr

Exercice 1. On observe X_1 de loi $\mathcal{U}([0, 1])$ sous H_0 ou $\mathcal{U}([2, 3])$ sous H_1 . Proposer un test de H_0 contre H_1 . Calculer les erreurs de première et seconde espèce, ainsi que la fonction puissance de ce test.

Exercice 2 (*À connaître – Test gaussien*). Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ connu. Pour $\mu_0 \in \mathbb{R}$, on considère le problème de test suivant :

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

1. Écrire un test de taille $\alpha \in]0, 1[$.
2. Calculer sa fonction puissance.
3. Étudier la convergence de la fonction puissance quand n tend vers l’infini. Cette convergence est-elle uniforme ?
4. Étudier la puissance du test en $\mu = \mu_0 + n^{-\gamma}$ quand n tend vers l’infini, en fonction de $\gamma \in \mathbb{R}_+$.
5. Le test proposé est-il sans biais ?

Exercice 3 (*À connaître – Test gaussien*). Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ inconnus. Pour $\sigma_0 \in \mathbb{R}_+^*$, on considère le problème de test suivant :

$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \quad \text{contre} \quad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2.$$

1. Écrire un test de taille $1 - \alpha$, $\alpha \in]0, 1[$.
2. Donner la p -valeur du test.
3. Écrire un code R qui permet d’évaluer cette p -valeur.

Exercice 4 (*À connaître – Modèle linéaire gaussien*). On se place dans le cadre d’un modèle linéaire gaussien. Soient $\mathbb{X} \in \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R})$ telle que $\mathbb{X}^T \mathbb{X} > 0$ et ξ un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^n$ de loi $\mathcal{N}(\mathbf{0}_n, \sigma^2 I_n)$, $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. On observe

$$Y = \mathbb{X}\beta + \xi, \quad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)^T \in \mathbb{R}^d.$$

On note $(\hat{\beta}_n, \hat{\sigma}_n^2) = (\hat{\beta}_{1,n}, \dots, \hat{\beta}_{d,n}, \hat{\sigma}_n^2)$ l’estimateur du maximum de vraisemblance de (β, σ^2) .

On souhaite tester, pour $a \in \mathbb{R}$ et $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$, les hypothèses

$$H_0 : \beta_j = a \quad \text{contre} \quad H_1 : \beta_j \neq a.$$

1. Montrer que si σ^2 est connu, alors le test de zone de rejet définie, pour $\alpha \in]0, 1[$, par

$$\mathcal{R}_\alpha = \left\{ Y : \left| \hat{\beta}_{j,n} - a \right| > q_{1-\alpha/2} \sigma \sqrt{(\mathbb{X}^T \mathbb{X})_{jj}^{-1}} \right\},$$

avec $q_{1-\alpha/2}$ le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, est un test de taille α permettant de tester H_0 contre H_1 .

2. Montrer que si σ^2 est inconnu, alors le test de zone de rejet définie, pour $\alpha \in]0, 1[$, par

$$\mathcal{R}_\alpha = \left\{ Y : \left| \hat{\beta}_{j,n} - a \right| > q_{1-\alpha/2, n-d} \sqrt{\frac{n}{n-d} \hat{\sigma}_n^2 (\mathbb{X}^T \mathbb{X})_{jj}^{-1}} \right\}$$

avec $q_{1-\alpha/2, n-d}$ le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi de Student $\mathcal{T}(n-d)$, est un test de taille α permettant de tester H_0 contre H_1 .

On souhaite tester, pour $b \in \mathbb{R}^d$, les hypothèses

$$H_0 : \beta = b \quad \text{contre} \quad H_1 : \beta \neq b.$$

3. Montrer que si σ^2 est connu, alors le test de zone de rejet définie, pour $\alpha \in]0, 1[$, par

$$\mathcal{R}_\alpha = \left\{ Y : \left\| \mathbb{X} (\hat{\beta}_n - b) \right\|^2 > \sigma^2 q_{1-\alpha, d} \right\},$$

avec $q_{1-\alpha, d}$ le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi du $\chi^2(d)$, est un test de taille α permettant de tester H_0 contre H_1 .

4. Montrer que si σ^2 est inconnu, alors le test de zone de rejet définie, pour $\alpha \in]0, 1[$, par

$$\mathcal{R}_\alpha = \left\{ Y : \left\| \mathbb{X} (\hat{\beta}_n - b) \right\|^2 > \frac{d}{n-d} q_{1-\alpha, d, n-d} \left\| Y - \mathbb{X} \hat{\beta}_n \right\|^2 \right\}$$

avec $q_{1-\alpha, d, n-d}$ le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi de Fisher $\mathcal{F}(d, n-d)$, est un test de taille α permettant de tester H_0 contre H_1 .