MIDO - Master 1 Mathématiques & Applications, 2021–2022

Méthodes de Monte Carlo

Examen Final - 12/01/2021

DURÉE 3H00 – DOCUMENTS ET CALCULATRICE NON AUTORISÉS

Cours	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3	Ex. 4	Total
...... / 5	...... / 4.5	...... / 3.5	...... / 4	...... / 5.5	...... / 22.5

PARTIE

À

RABATTRE

NOM : ....

PRÉNOM : ....

(lisiblement)

Important. Suivant les réglements en vigueur,

1. les enseignants présents lors de l'épreuve ne peuvent communiquer que sur les fautes d'énoncé potentielles. Toute autre question durant la composition ne sera pas acceptée.
2. les étudiants sont tenus de se lever au moment de l'annonce de fin de la composition. En cas de refus, le responsable de l'UE sera fondé à ne pas prendre en compte la copie incriminée.
3. l'identification de la copie de composition doit se faire au moment de la remise de la copie par les enseignants et surveillants. Il ne sera pas accordé de délai pour cette raison en fin d'épreuve.

Les exercices sont indépendants. Toutes les réponses sont à fournir sur la copie d'énoncé. L'espace blanc alloué à chaque question est amplement suffisant pour apporter une réponse correcte.

Notation. *i.i.d.* : indépendantes et identiquement distribuées.

Questions de cours

...... / **5**

1. Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. On note $F^{\leftarrow}$ l'inverse généralisé de F. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que

(a) $F^{\leftarrow}$ est une fonction croissante,

(b) $F^{\leftarrow}(U)$ est une variable aléatoire de même loi que X.

...... / **3**

PARTIE
À
RABATTRE

2. Soient $\mathbf{X}$ une variable aléatoire de $\mathbb{R}^d$ de densité f et h une fonction mesurable telle que $\mathbb{E}\left[h(\mathbf{X})^2\right] < \infty$. Donner la définition, en précisant les notations et les hypothèses éventuellement requises, de l'estimateur de $\delta = \mathbb{E}[h(\mathbf{X})]$ par la méthode

(a) d'échantillonnage préférentiel,

(b) de la variable antithétique,

(c) de la variable de contrôle (unidimensionnelle),

(d) de stratification.

...... /**2**

Exercice 1

...... /4.5

L'objectif de cet exercice est de simuler un vecteur (X, Y) de $\mathbb{R}^2$ suivant la densité

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{a} x^2 \exp\left(x - \frac{x^2}{4}\right) \frac{1}{y^2} \mathbb{1}_{\{x \in [0,4[\}} \mathbb{1}_{\{y \in [1,+\infty[\}},$$

avec $a = 12\sqrt{\pi}(2\Phi(\sqrt{2}) - 1)e - 8$, où Φ est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Parmi les codes suivants, lequel permet de simuler n réalisations suivant la loi marginale de Y ? Justifier.

(a) `1/runif(n)**2` (b) `1/runif(n)` (c) `1/(runif(n) - 1)` (d) `1/sqrt(runif(n))`

...... /0.5

On s'intéresse maintenant à la simulation suivant la loi marginale de X de densité

$$f(x) = \frac{1}{a} x^2 \exp\left(x - \frac{x^2}{4}\right) \mathbb{1}_{\{x \in [0,4[\}}.$$

2. Soit $g(\cdot \mid \mu)$ la densité de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, 2)$, $\mu \in \mathbb{R}_+$. Montrer que pour l'algorithme du rejet, le meilleur choix de μ possible est $\mu^\star = 1 + \sqrt{5}$ et qu'on a alors pour tout $x \in [0,4]$,

$$f(x) \leq \frac{32\sqrt{\pi}}{a(\mu^\star - 2)^2} \exp\left[\left(\frac{\mu^\star}{2}\right)^2 - 2\right] g(x \mid \mu^\star). \tag{1}$$

...... /3

3. Comment est modifiée l'inégalité (1) si l'on considère dans l'algorithme du rejet la loi normale $\mathcal{N}(\mu^\star, 2)$ tronquée à $[0, 4]$ (de densité $h(\cdot \mid \mu^\star)$) à la place de la densité $g(\cdot \mid \mu^\star)$? En supposant que le coût de simulation est le même pour ces deux lois, laquelle des deux est-il préférable d'utiliser ?

...... / **0.5**

4. Pour simuler un couple (X, Y) suivant Ψ, quelle solution présente le coût de simulation le plus faible : simuler le couple jointement à l'aide d'un algorithme du rejet ou simuler X et Y séparément suivant leurs marginales ? Justifier.

...... / **0.5**

Exercice 2

...... /3.5

On souhaite estimer

$$\delta = \int_0^{+\infty} \cos(\pi x) \exp\left(-\frac{x}{4}\right) \mathrm{d}x.$$

1. Écrire δ sous la forme $\mathbb{E}[h(X)]$ en précisant la fonction h utilisée et la loi de X.

...... /0.5

2. Donner le code R d'une fonction `mc(n)` qui fournit, pour `n` tirages de X, une estimation de δ, la variance de l'estimateur associé, ainsi qu'un intervalle de confiance au niveau 90%. On utilisera uniquement des tirages selon la loi uniforme sur $[0,1]$. La sortie se présentera sous forme d'une liste avec les arguments `value` pour l'estimation, `var` pour la variance et `ic` pour l'intervalle de confiance.

...... /0.5

3. Soit $K \in \mathbb{N}^*$. Choisir une variable de stratification Z et déterminer explicitement K strates, notées $D_1, \ldots, D_K$, telles que pour $k \in [\![1, K]\!]$, $\mathbb{P}[Z \in D_k] = 1/K$.

...... /0.5

4. Pour la méthode de stratification avec allocation proportionnelle, donner le code R d'une fonction `estim(n, K)` qui fournit une estimation de δ ainsi que la variance de l'estimateur, pour `n` tirages au total et `K` strates. La sortie se présentera sous forme d'une liste avec les arguments `value` pour l'estimation et `var` pour la variance.

...... /**1.5**

5. Proposer une procédure R qui permet d'évaluer l'efficacité relative de la méthode de stratification par rapport à la méthode classique. Comment interprète-t-on cette efficacité relative? On rappelle que `microbenchmark(f)$time` permet d'obtenir 100 évaluations du temps d'exécution de la fonction `f`.

...... /**0.5**

Exercice 3

...... /**4**

Soient $T \in \mathbb{R}_+^*$, $N \in \mathbb{N}^*$ et $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien standard. On note, pour $k \in [\![1, N]\!]$, W_k le brownien à l'instant $t_k = kT/N$. On pose

$$\Psi(W_1,\dots,W_N) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \exp\left(\lambda\frac{kT}{N} + \sigma W_k\right), \quad \text{avec} \quad \lambda, \sigma \in \mathbb{R}_+^*,$$

et on s'intéresse au problème d'estimation de $\delta = \mathbb{E}[h(\Psi(W_1,\dots,W_N))]$, avec h une fonction continue, monotone et bornée.

1. Montrer que

$$\Psi(W_1,\dots,W_N) = \frac{1}{N} g\left(\frac{\sqrt{N}W_1}{\sqrt{T}}, \frac{\sqrt{N}(W_2 - W_1)}{\sqrt{T}}, \dots, \frac{\sqrt{N}(W_N - W_{N-1})}{\sqrt{T}}\right),$$

avec

$$g(y_1,\dots,y_N) = \sum_{k=1}^{N} \exp\left(\lambda\frac{kT}{N} + \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}\sum_{j=1}^{k} y_j\right).$$

...... /**0.5**

2. Justifier que $\mathbb{E}\left[h(\Psi(W_1,\dots,W_N))^2\right] < \infty$.

...... /**0.5**

3. Montrer que $\mathrm{Cov}[h(\Psi(W_1,\ldots,W_N)), h(\Psi(-W_1,\ldots,-W_N))] \leq 0$. Que pouvez vous en conclure ?

...... /**1.5**

4. Soient $Z_1, \dots, Z_N$ variables aléatoires *i.i.d.* de loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Montrer que pour la méthode d'échantillonnage préférentielle par rapport à la loi de $Z_1, \dots, Z_N$, on a

$$\delta = \sigma^N \mathbb{E}\left[h\left(\frac{1}{N} g(Z_1, \dots, Z_N)\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left\{1 - \frac{1}{\sigma^2}\right\} \sum_{i=1}^{N} Z_i^2\right)\right].$$

...... /**1**

5. Donner une condition suffisante sur σ pour avoir un estimateur d'échantillonnage préférentiel de variance finie.

...... /**0.5**

Exercice 4

...... /5.5

Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ un vecteur gaussien centré tel que $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X_1] = \sigma_1^2 \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X_2] = \sigma_2^2 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mathrm{Cov}[X_1, X_2] = \rho \in]-1, 1[$. On pose $Y_1 = \exp(X_1)$ et $Y_2 = \exp(X_2)$. On souhaite estimer, pour $\lambda_1, \lambda_2, K \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\mathscr{I} = \mathbb{E}[h(Y_1, Y_2)], \quad \text{avec} \quad h(y_1, y_2) = \max\{\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 - K, 0\}.$$

Pour $(Y_{1n}, Y_{2n})_{n\geq 1}$, une suite de variables aléatoires *i.i.d.* de même loi que (Y_1, Y_2), on veut construire le meilleur estimateur de la forme

$$\widehat{\mathscr{I}}_n(b) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h(Y_{1k}, Y_{2k}) - < b, \begin{pmatrix} Y_{1k} - m_1 \\ Y_{2k} - m_2 \end{pmatrix} >, \quad \text{avec} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

et $< \cdot, \cdot >$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^2$, *i.e.*, $< U, V >= U^T V$.

1. Déterminer m_1 et m_2 en fonction de σ_1 et σ_2 de sorte que $\widehat{\mathscr{I}}_n(b)$ soit un estimateur sans biais de $\mathscr{I}$.

...... /1

On note

$$C = \begin{pmatrix} \mathrm{Cov}[h(Y_1, Y_2), Y_1] \\ \mathrm{Cov}[h(Y_1, Y_2), Y_2] \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \mathbb{V}\mathrm{ar}[Y_1] & \mathrm{Cov}[Y_1, Y_2] \\ \mathrm{Cov}[Y_1, Y_2] & \mathbb{V}\mathrm{ar}[Y_2] \end{pmatrix}.$$

2. Calculer explicitement $\mathbb{V}\mathrm{ar}[Y_1]$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}[Y_2]$ et $\mathrm{Cov}[Y_1, Y_2]$.

...... /1

3. Montrer que

$$n\mathbb{V}\mathrm{ar}\left[\widehat{\mathscr{I}}_n(b)\right] = \mathbb{V}\mathrm{ar}\left[h(Y_1, Y_2)\right] - (2 < b, C > - < b, \Sigma b >)\,.$$

...... /**1**

4. On suppose que $\det(\Sigma) > 0$. Montrer que le choix de $b = (b_1, b_2)$ permettant de minimiser $\mathbb{V}\mathrm{ar}[h(Y_1, Y_2) - b_1 Y_1 - b_2 Y_2]$ est

$$b^\star = \begin{pmatrix} b_1^\star \\ b_2^\star \end{pmatrix} = \Sigma^{-1} C, \quad \text{avec} \quad \Sigma^{-1} = \frac{1}{\mathbb{V}\mathrm{ar}[Y_1]\mathbb{V}\mathrm{ar}[Y_2] - \mathrm{Cov}[Y_1, Y_2]^2} \begin{pmatrix} \mathbb{V}\mathrm{ar}[Y_2] & -\mathrm{Cov}[Y_1, Y_2] \\ -\mathrm{Cov}[Y_1, Y_2] & \mathbb{V}\mathrm{ar}[Y_1] \end{pmatrix}.$$

...... /**1**

5. En déduire que $n\mathbb{V}\mathrm{ar}\left[\widehat{\mathscr{I}}_n(b^\star)\right] \leq \mathbb{V}\mathrm{ar}[h(Y_1, Y_2)]$.

...... / **0.5**

6. $\widehat{\mathscr{I}}_n(b^\star)$ est-il préférable à l'estimateur par la méthode de la variable contrôle (unidimensionnelle) basée sur $h_0(Y_1, Y_2) = \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2$?

...... /**1**

Espace complémentaire