Université Paris Dauphine
Département MIDO
Master 1 – Méthodes de Monte Carlo

2022–2023

Travaux Dirigés n°1

stoehr@ceremade.dauphine.fr

Exercice 1 *(Estimateur de la variance).* Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables *i.i.d.* de moyenne μ et de variance σ^2. On pose

$$\widehat{\sigma}^2_{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(Y_{2k-1} - Y_{2k})^2$$

1. Montrer que $\widehat{\sigma}^2_{2n}$ est un estimateur fortement consistant de σ^2

2. Étudier le biais de l'estimateur $\widehat{\sigma}^2_{2n}$.

Exercice 2. On souhaite calculer

$$\mathscr{I} = \int_0^1\int_0^2 \sin\left(x_1^3 + x_2\right)\ln\left(1 + x_1^2\right)\exp\left(-2x_1 - \frac{x_2^2}{2}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.$$

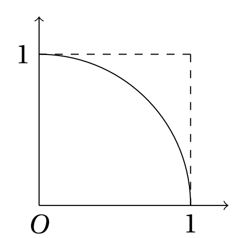
1. À l'aide d'une suite de variables aléatoires *i.i.d.* de lois connues, proposer deux façons différentes d'estimer $\mathscr{I}$ par la méthode de Monte Carlo classique. On notera $\widehat{\mathscr{I}}_n^{(1)}$ et $\widehat{\mathscr{I}}_n^{(2)}$ ces estimateurs, $n \geq 1$.

2. Calculer la variance associée à chacun de ces estimateurs et en déduire un intervalle de confiance asymptotique au niveau $1-\alpha$, $\alpha \in [0,1]$.

Exercice 3 *(Une estimation de π).*

1. En utilisant la figure ci-contre, proposer une estimation de π par la méthode de Monte Carlo classique.

2. Trouver le nombre de tirage n à effectuer pour que l'estimation de π soit précise à 0.1 près avec une probabilité supérieure à 0.95.



◇ Travail personnel ◇

Exercice 4 *(Boule en dimension d).*

1. Proposer une estimation du volume de la sphère en dimension d par la méthode de Monte Carlo classique.

2. Trouver le nombre de tirage n à effectuer pour que l'estimation soit précise à 0.1 près avec une probabilité supérieure à 0.95.