

TD n°1

stoehr@ceremade.dauphine.fr

Exercice 1 (*Estimateur de la variance*). Soit $(Y)_{n \geq 1}$ une suite de variables *i.i.d.* de moyenne μ et de variance σ^2 . On pose

$$\hat{\sigma}_{2n}^2 = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n (Y_{2k-1} - Y_{2k})^2$$

1. Montrer que $\hat{\sigma}_{2n}^2$ est un estimateur fortement consistant de σ^2
2. Étudier le biais de l'estimateur $\hat{\sigma}_{2n}^2$.

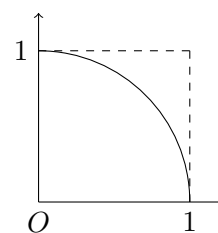
Exercice 2. On souhaite calculer

$$\mathfrak{I} = \int_0^1 \int_0^2 \sin(x_1^3 + x_2) \ln(1 + x_1^2) \exp\left(-2x_1 - \frac{x_2^2}{2}\right) dx_1 dx_2.$$

1. À l'aide d'une suite de variables aléatoires *i.i.d.* de lois connues, proposer deux façons différentes d'estimer $\mathfrak{I}$ par la méthode de Monte Carlo classique. On notera $\hat{\mathfrak{I}}_n^{(1)}$ et $\hat{\mathfrak{I}}_n^{(2)}$ ces estimateurs, $n \geq 1$.
2. Calculer la variance associée à chacun de ces estimateurs et en déduire un intervalle de confiance asymptotique au niveau $1 - \alpha$, $\alpha \in [0, 1]$.

Exercice 3 (*Une estimation de π*).

1. En utilisant la figure ci-contre, proposer une estimation de π par la méthode de Monte Carlo classique.
2. Trouver le nombre de tirage n à effectuer pour que l'estimation de π soit précise à 0.1 près avec une probabilité supérieure à 0.95.



◇ Travail personnel ◇

Exercice 4 (*Boule en dimension d*).

1. Proposer une estimation du volume de la sphère en dimension d par la méthode de Monte Carlo classique.
2. Trouver le nombre de tirage n à effectuer pour que l'estimation soit précise à 0.1 près avec une probabilité supérieure à 0.95.