Travaux Dirigés n°2

stoehr@ceremade.dauphine.fr

Exercice 1. Soient X une variable aléatoire de fonction de répartition F et $U \sim \mathscr{U}([0,1])$.

1. Montrer que $F^{\leftarrow}(U)$ est une variable aléatoire suivant la loi de X.

2. On considère $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $\mathbb{P}[a < X \leq b] > 0$. On note

$$X^{a,b} = F^{\leftarrow}\left[F(a) + \{F(b) - F(a)\}\, U\right].$$

(a) Justifier que la fonction de répartition de X sachant $a < X \leq b$ s'écrit pour $x \in \mathbb{R}$

$$G(x) = \frac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)} \mathbb{1}_{\{a<x\leq b\}} + \mathbb{1}_{\{x>b\}}.$$

(b) En déduire que $X^{a,b}$ a la même loi que X sachant $a < X \leq b$.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire de loi de densité $f : x \mapsto \max(0, 1 - |x|)$. Construire une méthode de simulation de X à l'aide de :

1. la méthode de la fonction inverse ;

2. l'algorithme du rejet.

Exercice 3 *(Méthode du rejet).* La loi normale $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu > 0$, $\sigma > 0$, tronquée de support $[b, +\infty[$ admet une densité f définie pour tout réel x par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}\Phi\left(\frac{\mu-b}{\sigma}\right)} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \mathbb{1}_{\{x\geq b\}},$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0,1)$.

Un algorithme du rejet naïf.

1. *(Travail personnel)* Montrer que f définit bien une densité de probabilité.

2. Décrire l'algorithme du rejet utilisant la loi normale $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$ comme loi instrumentale. Discuter en fonction de μ et b le nombre d'essais moyen avant acceptation.

Une distribution instrumentale alternative. On note pour $x \in \mathbb{R}$

$$f_1(x) = \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \mathbb{1}_{\{x\geq b\}}.$$

On suppose que $b > \mu$. On considère la loi exponentielle translatée de b, $\tau\mathscr{E}(\lambda, b)$, de densité

$$g_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda(x-b)} \mathbb{1}_{\{x \geq b\}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Montrer pour $x \geq b$ que

$$\frac{f_1(x)}{g_\lambda(x)} \leq \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda} \exp\left\{\lambda(\mu - b) + \dfrac{(\lambda\sigma)^2}{2}\right\} & \text{si } \mu + \lambda\sigma^2 > b, \\ \dfrac{1}{\lambda} \exp\left\{-\dfrac{(b-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1}$$

4. En déduire un algorithme du rejet permettant de simuler suivant la densité f.

5. Calculer la valeur λ^* pour laquelle le temps moyen de calcul de la méthode proposée soit le plus petit possible.

⋄ Travail personnel ⋄

Exercice 4 *(Box-Muller).*

1. Soient U_1 et U_2 des variables *i.i.d.* de loi $\mathscr{U}([0,1])$. Montrer que les variables

$$X_1 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\cos(2\pi U_2) \quad \text{et} \quad X_2 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\sin(2\pi U_2), \tag{2}$$

sont *i.i.d.* de loi $\mathscr{N}(0,1)$.

2. En déduire que les coordonnées polaires (R,Θ) de (X_1, X_2) vérifient

$$R^2 \sim \mathscr{E}(1/2) \quad \text{et} \quad \Theta \sim \mathscr{U}([0,2\pi]).$$

Exercice 5 *(Méthode polaire).*

1. Soient U_1 et U_2 des variables *i.i.d.* de loi $\mathscr{U}([-1,1])$. On effectue des tirages de U_1 et U_2 jusqu'à ce que $S := U_1^2 + U_2^2 \leq 1$. Montrer qu'à l'issue de cette procédure (U_1, U_2) suit une loi uniforme sur le disque unité $\mathscr{D}_1 = \{(u,v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$.

2. Montrer que les variables suivantes sont *i.i.d.* de loi $\mathscr{N}(0,1)$:

$$X_1 = U_1\sqrt{\frac{-2\ln(S)}{S}} \quad \text{et} \quad X_2 = U_2\sqrt{\frac{-2\ln(S)}{S}}$$